Teori - Finalprov Astronomiolympiaden Junior 2026

Astronomisk Ungdoms Astronomiolympiadgrupp

11 april 2026
kl 10:30 till 14:30

Detta är teorifinalprovet för den svenska Astronomiolympiaden Junior 2026. De fem personer med högst poäng i tävlingens samtliga rundor kommer att erbjudas en plats i det svenska laget i *International Olympiad on Astronomy & Astrophysics Jr (IOAA Jr)* i Thailand, i November.

Lycka till!

Namn	

Provet börjar på nästa sida. Vänd ej på provet förrän klockan slår 10:30. Sluta skriva omedelbart när klockan slår 14:30.

Provet har totalt 10 frågor, både kortare och längre. Efter varje fråga står den möjliga poängen utsatt, totalt på provet finns 50 poäng. Till *alla* frågor förväntas ett utförligt svar med motivation för full poäng. Även delvis korrekt lösning ger delvis poäng.

Tillåtna verktyg:
Skrivdon, kladdpapper, räknare, **ingen egen formelsamling** (förutom sista sidan av provbladet).

Jag har svarat på följande frågor (kryssa i)

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

1 Flhugo Berg (2p)

Omar observerar en lysande fluga med nament Flhugo Berg på ett ansenligt avstånd genom sitt teleskop. Den upplevs ha en skenbar magnitud som är 25 magnituder svagare än solen.

Figur 1: Källa: https://cybernews.com/science/china-send-fruit-fly-space/

Hur långt från observatören måste en **supernova typ Ia** befinna sig för att ha samma magnitud som flugan?

1 Lösningsförslag

Peak magnitude för typ 1a supernovae ligger på −19,3 mag. Vi kan då använda oss av distans modulen:

$$m - M = 5 \cdot log\left(\frac{d}{10\ pc}\right)$$

Användning av avståndsmodulen ger 1 p

Om flugan har en skenbar magnitud 25 gånger svagare än solen:

$$m_{\odot} = -26{,}74, \quad m_{fluggan} = -26{,}74 + 25 = -1{,}74$$

Lägger in värden:

$$-1{,}74 - (-19{,}3) = 5 \cdot log\left(\frac{d}{10\ pc}\right) \Longrightarrow 10 \cdot 10^{\frac{17{,}56}{5}} \approx 32510\ pc = 1{,}0045 \cdot 10^{18}\ \text{km}$$

$$\boxed{32510\ \text{pc}}$$

Rätt svar i antingen parsec eller km ± några värdesiffor ger 1 p

2 Zikais teleskopi (3p)

Zikai har ett teleskop hemma som har synfältet 1.35°, okularet för teleskopet har ett synfält på 65°
a) Hur stort är teleskopets förstorning?
b) Du får reda på att fokallängden för objektivet till teleskopet är 1.2 meter, hur stort är fokallängden för okularet? Svara i millimeter

2a Lösningsförslag

Vi använder formeln för synfält för att hitta förstorningen:

$$Synfält = \frac{Synfält_{okular}}{\omega} \Longrightarrow \frac{65^{\circ}}{\omega} = 1{,}35^{\circ}$$

Lös för ω:

$$\omega = \frac{65°}{1{,}35°} \Longrightarrow \omega \approx 48$$

,

$$\boxed{\omega = 48}$$

Rätt svar $\omega \approx 48$ på deluppgift a) ger 1 p

2b Lösningsförslag

Formeln för förstorning innehåller fokallängd för okular, vilket är det vi söker.

$$\omega = \frac{f_o}{f_e} \Longrightarrow f_e = \frac{f_o}{\omega}$$

Användning av ovanstående formel ger 1 p

Använder vi oss från förstorning som vi fick från uppgift 2a) får vi att okularet ungefär är $f_e = 25mm$

$$\boxed{f_e = 25\text{mm}}$$

Rätt svar på deluppgift b) $f_e = 25$ mm, i korrekt enhet, $\pm$ några värdesiffror, ger 1 p

3 Huvudseriestjärnor (3p)

Hur många gånger mer ljus strålar en huvudseriestjärna med yttemperaturen 15000 K ut än en huvudseriestjärna med yttemperaturen 5000 K? Utgå från HR-diagrammet i formelsamlingen längst bak i provet.

3 Lösningsförslag

Utifrån HR-diagrammet kan vi avläsa stjärnornas luminositet

$$15000\ K \approx 10L_\odot$$

och:

$$5000\ K \approx 1L_\odot$$

Korrekt avläsning av luminositeten för stjärnan vars temperatur är 15000 K med en felmarginal på $\pm$ 20% ger 1 p
Korrekt avläsning av luminositeten för stjärnan vars temperatur är 5000 K med en felmarginal på $\pm$ 20% ger 1 p

Vi beräknar kvoten mellan stjärnornas luminositeter

$$\frac{10L_\odot}{1L_\odot} = 10$$

Det innebär att stjärnan med temperatur 15000 K strålar ungefär 100 gånger starkare än stjärnan med temperatur 5000 K

$$\boxed{\text{10 gånger mer}}$$

Rätt svar inom intervallet 50 - 200 gånger mer ger 1 p

4 Västerbergs asteroid (4p)

Anders Västerberg berättar om sin asteroid 15311 Västerberg, som kretsar kring solen med omloppsdata som visas nedan. Asteroiden observeras från jorden ligga längs samma linje som jorden och solen. Vid detta tillfälle minskar avståndet mellan solen och asteroiden till 1,83 AU, varefter det börjar öka.

För att studera rörelsen närmare lämnar du jorden och placerar dig i rymden vid exakt den punkt där jorden befann sig vid observationstillfället.

Efter lite mindre än ett jordår har asteroiden rört sig en fjärdedel av omloppsbanan från sin ursprungliga position, medan observatören är kvar.

Bestäm avståndet mellan dig och asteroiden.

Omloppsbana	
Epok	17 oktober 2024
Halv storaxel	2,2531 AU
Siderisk omloppstid	1235,3 d (3,38 år)
Inklination	1,330°

Figur 2: Källa: Wikipedia

4 Lösningsförslag

Eftersom avståndet minskar till 1,83 AU och sedan ökar är detta perihelium, alltså $r_p = 1{,}83\,\text{AU}$. Med $a = 2{,}25\,\text{AU}$ fås

$$c = a - r_p = 2{,}25 - 1{,}83 = 0{,}42\,\text{AU}.$$

Att identifiera 1,83 *AU som perihelium och bestämma* c *ger 1p.*

För ellipsen gäller $b^2 = a^2 - c^2$, alltså

$$b^2 = 2.25^2 - 0.42^2 = 5{,}0625 - 0{,}1764 = 4{,}8861$$

och därmed

$$b \approx 2{,}21\,\text{AU}.$$

Att använda ellipsens geometri korrekt och bestämma b *ger 1p.*

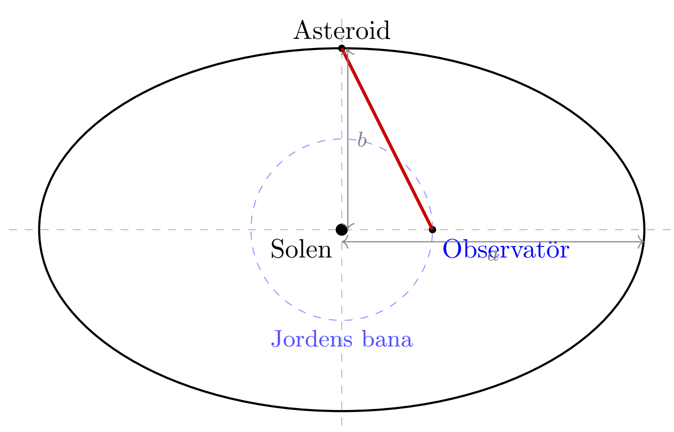
Efter en fjärdedel av ellipsen ligger asteroiden vid $(0{,}b)$ medan observatören är vid Jordens perihelium $(c + 1{,}0) = (3{,}25{,}0)$. Avståndet ges då av Pythagoras:

$$d = \sqrt{(c+1)^2 + b^2} = \sqrt{1{,}42^2 + 2{,}21^2} = \sqrt{6{,}9} \approx 2{,}63\,\text{AU}.$$

Att korrekt ställa upp rätt avståndsuttryck ger 1p.

$$\boxed{d \approx 2{,}63\,\text{AU}}$$

Korrekt slutsvar med enhet ger 1p.



Figuren är ej skalenlig.

Figur 3: Geometrisk konfiguration mellan asteroiden och jorden.

5 Var är midnattssolen? (4p)

Vi befinner oss i Norrköping vid koordinaterna 58°35' N , 16°10' Ö och solens deklination idag (11/4-2026) är +8° 20'. Mostafa kommer på att han vill uppleva midnattssol och tänker därför bege sig härifrån. I vilket väderstreck ska han bege sig och hur långt behöver han minst åka för att uppleva midnattssol imorgon? Antag att han färdas längs fågelvägen utmed jordytan. Du kan försumma jordens rörelse runt solen under en dag. Svara i kilometer.

5 Lösningsförslag

Eftersom att det är efter vårdagjämningen kommer midnattssol att ske i norr, Mostafa behöver alltså bege sig norrut.

Rätt väderstreck ger 1p

Använd att $h_{min} > 0$ samt att $h_{min} = \delta + \phi - 90°$

Användning av $h_{min} > 0$ ger 1p

$\delta = 8°20' = 8{,}33°$
Vi söker vilken latitud Mostafa behöver ta sig till, vilket ges av $0 < \delta + \phi - 90°$
alltså $\phi > 90 - 8{,}33 = 81{,}67°$

Att hitta vilken latitud Mostafa behöver ta sig till, $\phi = 81{,}67°$, ger 1p

Mostafa behöver alltså resa rakt norrut från latituden $58°35' = 58{,}58°$ till $81{,}67$ °.

$\Delta\phi = 81{,}67 - 58{,}58 = 23{,}09°$
Avståndet ges då av cirkelbågen över vinkeln 23,09° vars radie är jordradien:

$d = 2\pi R_{\oplus} \frac{23{,}09}{360} = 2567{,}5... \approx 2570\text{km}$

$\boxed{\text{2570 km norrut}}$

Rätt avstånd 2570 km ± några värdesiffror ger 1p

6 Polynova (4p)

Omar analyserar systemet AOJR26 som består av två binära stjärnor som roterar vinkelrät mot jordens plan med en parallax på 6,7" i en nära cirkulär bana. Han ser att systemet utsträcker sig 0,32' på himlen och stjärna 1 är ungefär 2,3% mer massiv än stjärna 2. Om stjärna 1 är solliknande, vad är omloppstiden i år?

Figur 4: Credit: NOIRLab/NSF/AURA/J. da Silva (Spaceengine)/M. Zamani

6 Lösningsförslag

Vi kan uttrycka massorna av båda stjärnorna som $M_1 = 1{,}023M_2$. Med parallaxen kan vi hitta avståndet:

$$d_{pc} = \frac{1}{6{,}7''} \approx 0{,}1492\ pc \approx 4{,}612 \cdot 10^{12}\ km$$

Systemet bredder sig 0,32' på himlen, vi kan nu med trigonometri hitta storleken/diametern av systemet. Vi måste däremot omvandla 0,32' till grader:

$$\frac{0{,}32'}{60} = k$$

$$tan\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{a_{seperation}}{d_{km}} \Longrightarrow a = tan\left(\frac{k}{2}\right) \cdot d_{km} \approx 2{,}15 \cdot 10^{8}\ km$$

Nu har vi beräknat den relevanta separationen mellan stjärnorna. Vi kan nu använda oss av Keplers tredje lag för att hitta omloppstiden!

$$T_{sek} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{G(M_2 + 1{,}023M_2)}}$$

Omvandla till år:

$$T_{år} = \frac{T_{sek}}{60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365} \approx \boxed{1{,}22\ år}$$

+1p För att ha skrivit rätt distans
+1p Avstånd mellan stjärnorna
+2p Rätt svar

7 So close yet so far (6p)

Viktor håller på att leta efter ett binärt stjärnsystem med ett optiskt teleskop som har brännvidden 1000 mm och fokalförhållandet $f/5$. Ett visst system har en parallax på 0.05" från jorden. Dess två stjärnorna har massorna 12 och 8 $M_\odot$ och kretsar kring varandra med en period P på 3,0 år.

Kan teleskopet upplösa de två stjärnorna som separata objekt så att Viktor hittar vad han letar efter?

7 Lösningsförslag

Först bestäms teleskopets öppning. Sambandet mellan fokalförhållande, brännvidd och öppning är

$$f/\# = \frac{f}{D}.$$

Alltså fås

$$D = \frac{f}{f/\#} = \frac{1000\,\text{mm}}{5} = 200\,\text{mm} = 0{,}20\,\text{m}.$$

Korrekt bestämning av teleskopets öppning ger 1p.

För att avgöra om systemet kan upplösas används Rayleighkriteriet,

$$\Theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D}.$$

För synligt ljus kan man sätta $\lambda \approx 550\,\text{nm} = 550 \cdot 10^{-9}\,\text{m}$, så

$$\Theta = 1{,}22\frac{550 \cdot 10^{-9}}{0{,}20} \approx 3{,}36 \cdot 10^{-6}\,\text{rad}.$$

Omvandling till bågsekunder görs med

$$1\,\text{rad} = 206265'',$$

så

$$\Theta \approx 3{,}36 \cdot 10^{-6} \cdot 206265 \approx 0{,}69''.$$

Korrekt användning av Rayleighkriteriet och beräkning av upplösningsgränsen ger 1p.

Stjärnornas inbördes avstånd fås med Keplers tredje lag i solsystemsenheter,

$$P^2 = \frac{a^3}{M},$$

där P mäts i år, a i AU och M i solmassor. Här är den totala massan

$$M = 12 + 8 = 20$$

och perioden

$$P = 3{,}0\,\text{år}.$$

Alltså

$$a^3 = P^2 M = 3^2 \cdot 20 = 180,$$

så

$$a = \sqrt[3]{180} \approx 5{,}65\,\text{AU}.$$

Korrekt användning av Keplers tredje lag och bestämning av den linjära separationen ger 2p.

Parallaxformeln

$$d = \frac{1}{p}$$

ger med $p = 0{,}05''$ avståndet

$$d = \frac{1}{0{,}05} = 20\,\text{pc}.$$

Eftersom 1 AU på avståndet 1 pc motsvarar $1''$, blir den observerade vinkelseparationen

$$\theta = \frac{a}{d} = \frac{5{,}65}{20} \approx 0{,}283''.$$

Korrekt användning av parallaxen och omvandling till vinkelseparation ger 1p.

Eftersom

$$0{,}283'' < 0{,}69'',$$

är stjärnornas separation mindre än teleskopets upplösningsgräns, så teleskopet kan inte skilja dem åt som två separata objekt.

$$\boxed{\text{Nej, teleskopet kan inte upplösa systemet som två separata stjärnor.}}$$

Korrekt jämförelse mellan vinkelseparation och upplösningsgräns samt korrekt slutsats ger 1p.

8 Är det här rätt väg? (6p)

Din vän Hugo Berg älskar att resa och har nu hamnat vid vätemolnet München. Han berättar för dig att molnet rör sig med den totala hastigheten 500 km/s relativt jorden.

Molnets parallax är 0.0014”. Under ett år observerar du att molnet inte förändrar sin rektascension alls, men att dess deklination ändras med 0.025”. Den neutrala vätgasens 21-cm-linje har i vila våglängden 21.1 cm.

Bestäm den observerade våglängden för denna linje om molnets radiella hastighetskomponent är riktad bort från jorden. *Anta att Dopplereffekten kan behandlas icke-relativistiskt.*

8 Lösningsförslag

Parallaxen är $p = 0{,}0014''$, alltså är avståndet

$$d = \frac{1}{p} \approx 714{,}3\,\text{pc}.$$

Korrekt bestämning av avstånd från parallax ger 1p.

Eftersom molnet inte ändrar rektascension alls men ändrar deklination med $0{,}025''$ på ett år är den tangentiella egenrörelsen

$$\mu = 0{,}025''/\text{år},$$

så den tangentiella hastigheten blir

$$v_t = 4{,}74\,\mu d = 4{,}74 \cdot 0{,}025 \cdot 714{,}3 \approx 84{,}6\,\text{km/s}.$$

Korrekt användning av egenrörelseformeln och beräkning av v_t ger 2p.

Den totala hastigheten är 500 km/s, alltså fås den radiella komponenten från

$$v_r = \sqrt{500^2 - 84{,}6^2} \approx 492{,}8\,\text{km/s}.$$

Korrekt uppdelning i radiell och tangentiell hastighet ger 1p.

Eftersom molnet rör sig bort från jorden blir det rödförskjutning. Med den icke-relativistiska Dopplereffekten

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c}$$

fås

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_0 \left(1 + \frac{v_r}{c}\right) = 21{,}1 \left(1 + \frac{492{,}8}{299792}\right)\,\text{cm} \approx 21{,}135\,\text{cm}.$$

Korrekt uppställning av Dopplereffekten och insättning ger 1p.

$$\boxed{\lambda_{\text{obs}} \approx 21{,}14\,\text{cm}}$$

Korrekt slutsvar med enhet ger 1p.

9 Måna Lisa (8p)

Donililo Donile observerar tre av Jupiters månar. Vid varje observation mäts månens vinkelposition θ längs banan, räknat från en godtycklig referensriktning i banplanet. Vinkeln anges i grader.

Observationerna sträcker sig över flera dagar. Antag att banorna är cirkulära och att vinkelhastigheten är konstant. Varje vinkelmätning har osäkerheten $\pm 5°$.

Källa: Omar Wehbe, *Partikular*

Io

Tid (dygn)	θ (°)
0.0	0
0.5	101
1.0	203
1.5	305

Europa

Tid (dygn)	θ (°)
0.0	0
1.0	101
2.0	203
3.0	305

Ganymedes

Tid (dygn)	θ (°)
0.0	0
2.0	101
4.0	203
6.0	305

a) Plotta vinkelpositionen θ som funktion av tiden t för varje måne. Bestäm vinkelhastigheten $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ för varje måne samt det lägsta och högsta möjliga värdet, givet mätosäkerheterna.

b) Bestäm omloppstiden T för varje måne samt det lägsta och högsta möjliga värdet.

c) Avståndet från Jupiter till Io är uppmätt till $a_{\mathrm{Io}} = 4.22 \cdot 10^5$ km. Bestäm banradierna för Europa och Ganymedes, med osäkerheten i värden.

d) Bestäm Jupiters massa $M_{♃}$ samt det lägsta och högsta möjliga värdet utifrån osäkerheterna ovan.

9 Lösningsförslag

a) Punkterna ligger approximativt på räta linjer, så vinkelhastigheten fås som lutningen

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

Vi använder första och sista mätpunkten. Varje vinkel har osäkerheten $\pm 5°$, så för skillnaden $\Delta\theta$ fås extremfallen genom att kombinera minsta möjliga startvärde med största möjliga slutvärde, respektive största möjliga startvärde med minsta möjliga slutvärde:

$$\Delta\theta_{\max} = (305+5) - (0-5) = 315°, \qquad \Delta\theta_{\min} = (305-5) - (0+5) = 295°.$$

För Io:

$$\omega_{\mathrm{Io}} = \frac{305}{1{,}5} \approx 203{,}3, \quad \omega_{\mathrm{Io,min}} = \frac{295}{1{,}5} \approx 196{,}7, \quad \omega_{\mathrm{Io,max}} = \frac{315}{1{,}5} = 210{,}0.$$

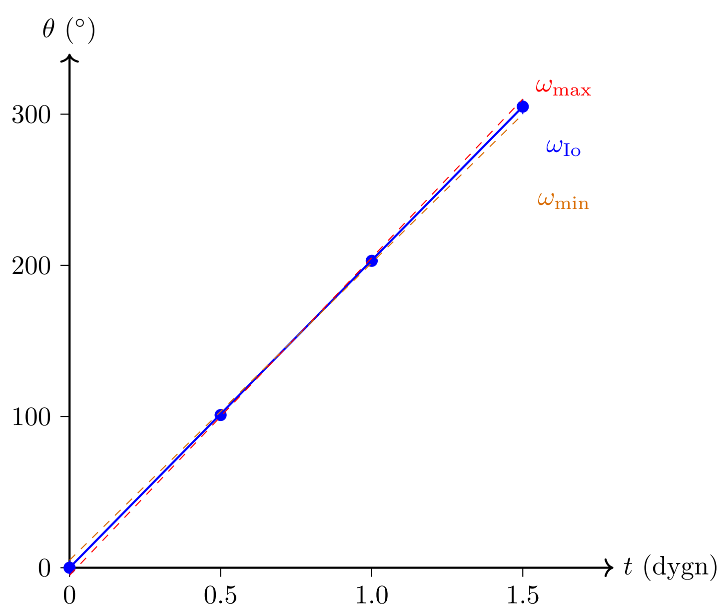
För Europa:

$$\omega_{\mathrm{Eu}} = \frac{305}{3{,}0} \approx 101{,}7, \quad \omega_{\mathrm{Eu,min}} = \frac{295}{3{,}0} \approx 98{,}3, \quad \omega_{\mathrm{Eu,max}} = \frac{315}{3{,}0} = 105{,}0.$$

För Ganymedes:

$$\omega_{\mathrm{Ga}} = \frac{305}{6{,}0} \approx 50{,}8, \quad \omega_{\mathrm{Ga,min}} = \frac{295}{6{,}0} \approx 49{,}2, \quad \omega_{\mathrm{Ga,max}} = \frac{315}{6{,}0} = 52{,}5.$$

Metod + korrekt bestämning av ω och intervall ger 2p.



Figur 5: Bestämning av vinkelhastighet för Io. Den centrala lutningen ger ω, medan $\omega_{\max}$ och $\omega_{\min}$ fås genom att dra linjer genom extremfallen för första och sista mätpunkten.

b) Omloppstiden ges av

$$T = \frac{360^\circ}{\omega}.$$

För Io:

$$T_{\text{Io}} = \frac{360}{203{,}3} \approx 1{,}77, \quad T_{\text{Io,min}} = \frac{360}{210{,}0} \approx 1{,}71, \quad T_{\text{Io,max}} = \frac{360}{196{,}7} \approx 1{,}83.$$

För Europa:

$$T_{\text{Eu}} = \frac{360}{101{,}7} \approx 3{,}54, \quad T_{\text{Eu,min}} = \frac{360}{105{,}0} \approx 3{,}43, \quad T_{\text{Eu,max}} = \frac{360}{98{,}3} \approx 3{,}66.$$

För Ganymedes:

$$T_{\text{Ga}} = \frac{360}{50{,}8} \approx 7{,}08, \quad T_{\text{Ga,min}} = \frac{360}{52{,}5} \approx 6{,}86, \quad T_{\text{Ga,max}} = \frac{360}{49{,}2} \approx 7{,}32.$$

Korrekt bestämning av omloppstider ger 2p.

c) Med Keplers tredje lag gäller

$$T^2 \propto a^3 \quad \Rightarrow \quad a = a_{\text{Io}} \left(\frac{T}{T_{\text{Io}}}\right)^{2/3}.$$

För Europa:

$$a_{\text{Eu}} = 4{,}22 \cdot 10^5 \left(\frac{3{,}54}{1{,}77}\right)^{2/3} \approx 6{,}70 \cdot 10^5\,\text{km},$$

$$a_{\text{Eu,min}} = 4{,}22 \cdot 10^5 \left(\frac{3{,}43}{1{,}83}\right)^{2/3} \approx 6{,}41 \cdot 10^5\,\text{km}, \quad a_{\text{Eu,max}} = 4{,}22 \cdot 10^5 \left(\frac{3{,}66}{1{,}71}\right)^{2/3} \approx 7{,}00 \cdot 10^5\,\text{km}.$$

För Ganymedes:

$$a_{\text{Ga}} = 4{,}22 \cdot 10^5 \left(\frac{7{,}08}{1{,}77}\right)^{2/3} \approx 1{,}06 \cdot 10^6\,\text{km},$$

$$a_{\text{Ga,min}} = 4{,}22 \cdot 10^5 \left(\frac{6{,}86}{1{,}83}\right)^{2/3} \approx 1{,}02 \cdot 10^6\,\text{km}, \quad a_{\text{Ga,max}} = 4{,}22 \cdot 10^5 \left(\frac{7{,}32}{1{,}71}\right)^{2/3} \approx 1{,}11 \cdot 10^6\,\text{km}.$$

Korrekt användning av Keplers tredje lag och bestämning av banradier ger 2p.

d) Jupiters massa ges av

$$M_{\text{J}} = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2}.$$

Med Io, $a_{\text{Io}} = 4{,}22 \cdot 10^5\,\text{km} = 4{,}22 \cdot 10^8\,\text{m}$ och $T_{\text{Io}} = 1{,}77\,\text{dygn} = 1{,}53 \cdot 10^5\,\text{s}$, fås

$$M_{\text{J}} \approx \frac{4\pi^2 (4{,}22 \cdot 10^8)^3}{6{,}67408 \cdot 10^{-11} (1{,}53 \cdot 10^5)^2} \approx 1{,}90 \cdot 10^{27}\,\text{kg}.$$

Med periodintervallet för Io fås ungefär

$$M_{\text{J},min} \approx 1{,}78 \cdot 10^{27}\,\text{kg}, \qquad M_{\text{J},max} \approx 2{,}03 \cdot 10^{27}\,\text{kg},$$

så detta kan skrivas som

$$M_{\text{J}} \approx (1{,}90 \pm 0{,}13) \cdot 10^{27}\,\text{kg}.$$

$$\boxed{M_{\text{J}} \approx (1{,}90 \pm 0{,}13) \cdot 10^{27}\,\text{kg}}$$

Korrekt massbestämning inklusive osäkerhet ger 2p.

Metoden att bestämma vinkelhastigheten från enstaka punkter samt att uppskatta osäkerheter genom att använda största och minsta möjliga värden är en förenkling. I verklig astronomisk analys används vanligtvis regressionsmetoder (t.ex. minstakvadratmetoden) och mer noggrann felpropagering. För ett sammanhang som AO Jr är dock denna metod tillräckligt noggrann.

10 Vector's Vector Lazor (10p)

Den onda skurken Vector Humlebo planerar att bygga en dödlig laser med konstant utsikt över jorden. För att undvika att behöva justera dess bana vill han placera den i en punkt där den naturligt följer jordens omlopp runt solen.

Punkterna L_1 och L_2 är positioner i sol–jord-systemet där en satellit kan ha samma omloppstid runt solen som jorden. De kallas Lagrangepunkter.

Betrakta lasern som en satellit med försumbar massa som ligger längs linjen genom solen och jorden.

Låt solens massa vara M, jordens massa vara m, avståndet mellan solen och jorden vara R, och systemets vinkelhastighet vara ω.

a) Visa att systemets vinkelhastighet uppfyller $\omega^2 = \frac{GM}{R^3}$.

10a Lösningsförslag

Eftersom att solen roterar, måste allting i systemet rotera med solen och därmed uppleva olika accelerationer beroende på avståndet, då några åker snabbare respektive långsammare genom rymden.
Formeln för centripetal acceleration:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Vi kan även uttrycka hastigheten av objekten i systemet som en vinkel som sveps med ett avstånd R. Då kan hastigheten uttryckas som sådan:

$$v = \omega R$$

Vårt uttryck för centripetal acceleration blir då:

$$a_c = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R$$

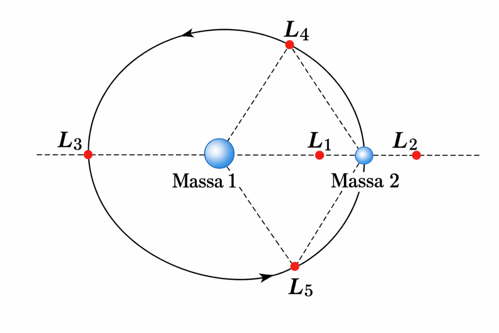
Nu har vi uttryckt hur objekten påverkas av *en* acceleration. Vi har däremot fler accelerationer som påverkar allt i systemet. Den största är nämligen gravitationen. För att dessa punkter i systemet ska vara stabila, måste då den centripetala accelerationen vara lika med den gravitationella för att uppnå jämvikten. Därför vi kan då uttrycka en ny ekvation $a_g = a_c$, där gravitationen räknas som en acceleration.

$$a_g = \frac{GM}{R^2}, \quad a_g = a_c \Longrightarrow \frac{GM}{R^2} = \omega^2 R$$

Förenkla:

$$\frac{GM}{R^2} = \omega^2 R \Longrightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{GM}{R^3}}$$

Att nämna att $v = \omega R$ ger 1p.
Att skriva $a_c = a_g$ eller betrakta att jämvikt krävs för att ha stabila punkter i ett dynamiskt system ger 1p.
Rätt uttryck hittad utifrån uträkningar ger 1p.
tot: +3p



Figur 6: Lagrangepunkter - L_1 och L_2, samt alla andra

b) Betrakta punkten L_1, som ligger mellan jorden och solen. Låt avståndet mellan jorden och satelliten vara x, där $x \ll R$.

Bestäm först den totala gravitationsaccelerationen på satelliten från solen och jorden. Sätt därefter upp villkoret för att satelliten ska rotera med samma vinkelhastighet som jorden, och visa att

$$x \approx R\left(\frac{m}{3M}\right)^{1/3}.$$

10b Lösningsförslag

I uppgiften uttrycks distansen från solen till jorden vara R. Om vi nu bestämmer ett nytt avstånd från solen till L_1 att vara r, kan vi nu betrakta två gravitationella accelerationer på punkt L_1. Eftersom att solen är den mest massiva kroppen i systemet kommer allting naturligtvis färdas åt det hålet, därmed anger vi då en positiv acceleration till solen. Jorden är däremot fortfarande tillräckligt massiv för att dra på punkt L_1 och kommer därför att bidra med en *negativ* acceleration mot jorden (i jämförelse med den positiva som åker in mot solen.)

Formeln som tidigare gav för gravitationella accelerationen är följande:

$$a_g = \frac{GM}{R^2}$$

För att beskriva avståndet från L_1 till solen, kan vi då göra:

$$R_{solen \longrightarrow jorden} - x_{jorden \longrightarrow L_1}$$

Då kan vi nu beskriva den total skillnaden i gravtionell acceleration Δa_g som:

$$\Delta a_g = \frac{GM_\odot}{(R-x)^2} - \frac{Gm_\oplus}{x^2}$$

För att en L_1 ska vara en stabil position måste flera olika accelerationer balanseras ut, och eftersom att vi enbart har två påverkande accelerationer, $a_c = \omega^2 r$ och Δa_g, kan vi nu sätta dem lika med varandra.

$$\omega^2(R-x) = \frac{GM_\odot}{(R-x)^2} - \frac{Gm_\oplus}{x^2}$$

Förenkla med expansion $\frac{1}{R^2}\left(1+\frac{2x}{R}\right)$ och $\omega^2 = \frac{GM}{R^3}$

$$\frac{GM_\odot}{R^3}(R-x) = \frac{GM_\odot}{R^2}\left(1+\frac{2x}{R}\right) - \frac{Gm_\oplus}{x^2}$$

Vänsterled och högerled kan förenklas till

$$\frac{GM_\odot}{R^3}(R-x) \Longrightarrow \frac{GM_\odot}{R^2} - \frac{GM_\odot \cdot x}{R^3}$$

och

$$\frac{GM_\odot}{R^2}\left(1+\frac{2x}{R}\right)-\frac{Gm_\oplus}{x^2}\Longrightarrow\frac{GM_\odot}{R}+\frac{2x\cdot GM_\odot}{R^3}-\frac{Gm_\oplus}{x^2}$$

—

$$\frac{GM_\odot}{R^2}-\frac{GM_\odot\cdot x}{R^3}=\frac{GM_\odot}{R^2}+\frac{2x\cdot GM_\odot}{R^3}-\frac{Gm_\oplus}{x^2}$$

Termerna $\frac{GM_\odot}{R^2}$ försvinner från båda lederna

$$-\frac{GM_\odot\cdot x}{R^3}=\frac{2x\cdot GM_\odot}{R^3}-\frac{Gm_\oplus}{x^2}$$

Vi isolerar $\frac{1}{x^2}$ termen för att äntligen få våra sista ekvationer

$$\frac{Gm_\oplus}{x^2}=\frac{2x\cdot GM_\odot}{R^3}+\frac{GM_\odot\cdot x}{R^3}\Longrightarrow\frac{Gm_\oplus}{x^2}=\frac{3x\cdot GM_\odot}{R^3}$$

Lös för x

$$\frac{Gm_\oplus}{x^2}=\frac{3x\cdot GM_\odot}{R^3}\Longrightarrow x^3=\frac{R^3\cdot Gm_\oplus}{3GM_\odot}$$

$$\boxed{x\approx R\left(\frac{m_\oplus}{3M_\odot}\right)^{1/3}}$$

Att definiera alla accelerationer i systemet ger 1p.
Hitta korrekt Δa_g ger 1p.
Skriva korrekt formel $\omega^2(R-x)=\frac{GM_\odot}{(R-x)^2}-\frac{Gm_\oplus}{x^2}$ ger 2p
Använda Taylor utveckling korrekt $\frac{GM_\odot}{R^3}(R-x)=\frac{GM_\odot}{R^2}\left(1+\frac{2x}{R}\right)-\frac{Gm_\oplus}{x^2}$ ger 1p
Rätt definierat svar utifrån uträkning ger 1p
tot: +6p

c) Betrakta nu punkten L_2, som ligger på andra sidan jorden. Visa att även i detta fall gäller samma svar från del b)

10c Lösningsförslag

I ekvation

$$\Delta a_g=\frac{GM_\odot}{(R-x)^2}-\frac{Gm_\oplus}{x^2}$$

kan vi skriva om subtraktionen som en addition, då vi adderar sol-jord avståndet och avståndet från L_1 till jorden. Vi vet att L_1 och L_2 är placerade lika långt bort från varandra. Upprepar vi samma steg kommer vi fram till att alla $R-x$ termer blir $R+x$.

$$\frac{GM_\odot}{R^3}(R+x)=\frac{GM_\odot}{R^2}\left(1-\frac{2x}{R}\right)-\frac{Gm_\oplus}{x^2}$$

Igen:

$$-\frac{GM_\odot\cdot x}{R^3}+-\frac{Gm_\oplus}{x^2}=\frac{2x\cdot GM_\odot}{R^3}$$

Förenkla:

$$\boxed{x\approx R\left(\frac{m_\oplus}{3M_\odot}\right)^{1/3}}$$

Rätt formulering av att $-$ blir till $+$ och i Taylor expansionen $+$ blir till $-$ ger 1p.

tot: +1p

Använd följande approximationen vid behov i del b) och c):

$$\frac{1}{(R \pm x)^2} \approx \frac{1}{R^2}\left(1 \mp \frac{2x}{R}\right).$$

Givna solsystemsdata, värden och formler

Himlakropp	Diameter (km)	Avstånd från solen (10^6km)	Massa (kg)
Solen	$1{,}393 \cdot 10^6$	—	$1{,}989 \cdot 10^{30}$
Merkurius	4879,4	57,9	$3{,}301 \cdot 10^{23}$
Venus	12104	108,2	$4{,}868 \cdot 10^{24}$
Jorden	12756	149,597870	$5{,}972 \cdot 10^{24}$
Mars	6779	227,9	$6{,}417 \cdot 10^{23}$
Jupiter	142800	778,3	$1{,}898 \cdot 10^{27}$
Saturnus	120660	1427,0	$5{,}681 \cdot 10^{26}$
Uranus	51118	2871,0	$8{,}681 \cdot 10^{25}$
Neptunus	49528	4497,1	$1{,}024 \cdot 10^{26}$
Pluto	2376,6	5906,4	$1{,}309 \cdot 10^{22}$

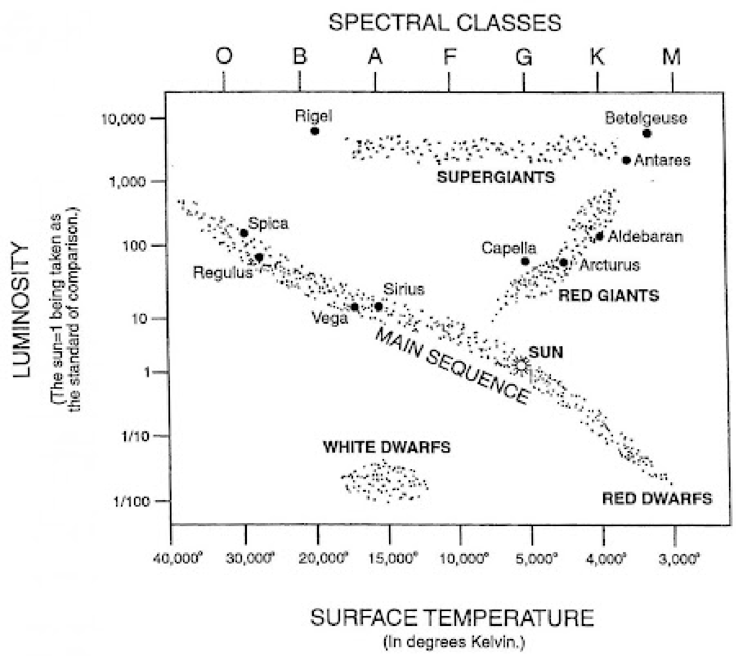
Tabell 1: Grundläggande data om solsystemet.

Namn	Värde	Enhet
Newtons gravitationskonstant (G)	$6{,}67408 \cdot 10^{-11}$	$\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$
Hubbles konstant (H_0)	70	$\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$
Solarkonstanten (G_{SC})	1360	$\mathrm{W\,m^{-2}}$
Solens luminositet ($L_\odot$)	$3{,}826 \cdot 10^{26}$	W
Solens yttemperatur ($T_\odot$)	5777	K
Stefan Boltzmanns konstant (σ)	$5{,}67 \cdot 10^{-8}$	$\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Ljusets hastighet i vakuum (c)	299792458	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
Ljusår (ly)	$9{,}461 \cdot 10^{12}$	km
Parsec (pc)	3,262	ljusår (ly)
Astronomisk Enhet (AE)	$150 \cdot 10^6$	km
Elektronvolt (eV)	$1{,}60217663 \cdot 10^{-19}$	J
Siderisk dag	23,9344696	h
Julianskt år	365,25	dagar (24h)
Solens apparenta magnitud ($m_\odot$)	$-26{,}74$	mag
Solens absoluta magnitud ($M_\odot$)	4,83	mag
Peak M_V för typ 1a supernova	$-19{,}3$	mag

Tabell 2: Fysikaliska värden.

Namn	Formel
Gravitationella accelerationen	$g = \frac{GM}{r^2}$
Gravitationella kraften på en planet	$F_g = mg$
Densitet-massförhållande	$M = \rho \cdot V$
Centripetal acceleration	$F_c = \frac{mv^2}{r}$
Newtons gravitationslag	$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$
Keplers tredje lag	$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$
Keplers tredje lag (i jordenheter)	$T^2 = \frac{a^3}{M}$
Excentricitet	$e = \frac{c}{a} = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$
Halv storaxel	$a = \frac{r_a + r_p}{2}$
Luminositet och flux	$F = \frac{L}{4\pi r^2}$
Magnitud och flux	$m_1 - m_2 = -2{,}5\log(\frac{F_1}{F_2})$
Avståndsmodulen	$m - M = 5\log(\frac{d}{10})$
Våglängd-Frekvens	$\lambda f = c$
Linsformeln	$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
Rayleigh Kriteriet	$\Theta = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D}$
Förstoring av objekt	$\omega = \dfrac{f_o}{f_e}$, $\quad f_o =$ objektivets brännvidd, $f_e =$ okularets brännvidd
Synfält	$synfält = \frac{Synfält_{okular}}{\omega}$
Wiens lag	$\lambda_{max} T = 2{,}898\,\mathrm{mm\,K}$
Stefan-Boltzmanns lag	$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$
Hubbles lag	$H_0 r = v$
Dopplerförskjutning	$\frac{v}{c} = z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$
Parallax	$d = \frac{1}{p}$
Tangentialhastighet	$v_t = 4{,}74\mu d$
Övre kulmination	$h_{max} = 90° - \varphi + \delta$
Undre kulmination	$h_{min} = \delta + \varphi - 90°$

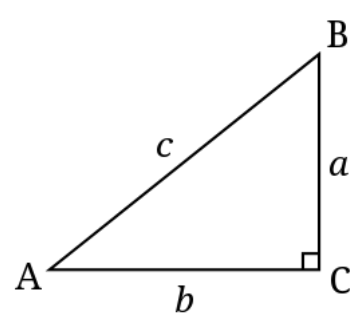
Tabell 3: Fysikaliska formler



Figur 7: Ett Hertzsprung-Russel diagram

Namn	Formel
Sinus	$\sin A = \frac{a}{c}$
Cosinus	$\cos A = \frac{b}{c}$
Tangens	$\tan A = \frac{a}{b}$
Pythagoras sats	$c^2 = a^2 + b^2$
Tiologaritmen	$10^{\log_{10} a} = \log_{10} 10^a = a$
Logaritmmultiplikation	$\log a \cdot b = \log a + \log b$
Logaritmdivision	$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$
Logaritmpotenser	$x \log a = \log a^x$

Tabell 4: Matematiska formler



Figur 8: Rätvinklig triangel för definition av trigonometriska formler