



Din guide till Astronomiolympiaden Jr.

---

# Teorikompendium **Junior**

*ASTRONOMISK UNGDOMS ELEVFÖRBUND*

*1:a Upplagan: Junior Olympiadgruppen, 2026*

## Förord

Teorikompendiet Junior är en resurs anpassad för den svenska Astronomiolympiaden Juniors finalvecka. Merparten av innehållet är baserat på Astronomiolympiadens teorikompendium, skapat år 2025. Teorin som presenteras i kompendiet motsvarar de föreläsningar som ges under veckan och bör därför användas som stöd för den intresserade eleven. Problemen i kompendiet är utformade som förberedelse inför Astronomiolympiaden Juniors finaltävling och håller därför i många fall hög nivå. Denna utgåva har skapats specifikt för finalen år 2026.

Om man vill använda teorikompendiet för undervisning eller i annan verksamhet är det fritt fram att göra så men citera Astronomisk Ungdoms Elevförbund och Astronomiolympiaden när ni gör så. Om ni har synpunkter eller vill få upplysningar om kompendiets innehåll så kan ni kontakta olympiaden direkt genom [astronomiolympiadenjunior@rymdelev.se](mailto:astronomiolympiadenjunior@rymdelev.se).

Vi vill tacka Viktor Stubbält för bilden i kompendiets framsida.

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Matematik</b>	<b>5</b>
1	Algebra . . . . .	5
2	Linjära funktioner . . . . .	12
3	Trigonometri . . . . .	16
4	Exponentiella funktioner . . . . .	27
5	Logaritmer . . . . .	31
6	Statistik . . . . .	35
7	Uppgifter . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Astronomi</b>	<b>44</b>
1	Stjärnors rörelse . . . . .	44
2	Flux och magnituder . . . . .	45
3	Svartkroppsstrålning . . . . .	46
4	Spektrallinjer . . . . .	48
5	Dopplereffekten . . . . .	49
6	Uppgifter . . . . .	51
<b>3</b>	<b>Koordinatsystem</b>	<b>56</b>
1	Geografiska koordinatsystemet . . . . .	56
2	Tid . . . . .	57
3	Sfärisk trigonometri . . . . .	58
4	Himmelssfären . . . . .	61
5	Rymdkoordinater . . . . .	63
6	Kulmination . . . . .	68
7	Övningar - 1 . . . . .	70
8	Extra: Transformation mellan Alt-Azimuth och Ekvatoriellt . . . . .	71
9	Övningar - 2 . . . . .	73
<b>4</b>	<b>Optik</b>	<b>74</b>
1	Bakgrund . . . . .	74
2	Linser . . . . .	74
3	Teleskop . . . . .	76
4	Förstoring och upplösning . . . . .	77
5	Uppgifter . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Banmekanik</b>	<b>81</b>
1	Newtons insatser till den moderna banmekaniken . . . . .	81
2	Keplers lagar . . . . .	82
3	Uppgifter . . . . .	87

<b>6</b>	<b>Astrofysik</b>	<b>89</b>
1	Kärnfysik . . . . .	89
2	Stjärnevolution . . . . .	91
3	Variabla stjärnor . . . . .	92
4	Binära system . . . . .	93
5	Stjärnhopar . . . . .	94
6	Galaktisk astrofysik . . . . .	94
7	Uppgifter . . . . .	96
<b>7</b>	<b>Natthimmel</b>	<b>98</b>
1	Stjärnbilder och stjärnor . . . . .	98
2	Stjärnkartor . . . . .	98
3	Namnsättning . . . . .	100
4	Djuprym��objekt . . . . .	100
5	Messierobjekt . . . . .	101
6	Observationsknep . . . . .	103
7	Månen . . . . .	106
8	Vinkelavstånd . . . . .	108
9	Resurser . . . . .	108
10	Uppgifter . . . . .	110
<b>8</b>	<b>Facit till uppgifter</b>	<b>111</b>
1	Matematik . . . . .	111
2	Astronomi . . . . .	113
3	Koordinatsystem . . . . .	115
4	Optik . . . . .	116
5	Banmekanik . . . . .	117
6	Astrofysik . . . . .	117
7	Natthimmel . . . . .	117

# Kapitel 1

# Matematik

## Matematik inom IOAA Junior

IOAA Junior innehåller uppgifter som kräver matematik. Här går vi igenom grundläggande idéer, och du kan hoppa över det som känns för enkelt. Vissa begrepp förklaras i fotnoter.

## 1 Algebra

I algebra byter man ofta ut tal mot bokstäver för att beskriva samband och lösa problem mer kompakt.

### 1.1 Ekvationer

Ekvationer, formler och funktioner bygger på samma idé: att **beskriva samband mellan storheter**<sup>1</sup>. I problemlösning får man ofta ett samband och några givna värden, och ska räkna ut något okänt.

#### Användning av variabler

Text blir snabbt opraktisk vid beräkningar, så man använder variabler och likheter. En **likhet** är en relation mellan två uttryck<sup>2</sup> med samma värde.

Om hunden har  $x$  ben och kycklingen  $y$ , och hunden har dubbelt så många ben, så gäller

$$x = 2y.$$

Att beskriva problem med ekvationer är ofta smidigare än med text. Man väljer en okänd storhet, skriver sambandet matematiskt och använder samma operation i båda leden för att bevara likheten. Om  $a = b$ , så gäller också  $a + 2 = b + 2$ .

#### Exempel 1.1: SVT-problemet (sträcka-hastighet-tid)

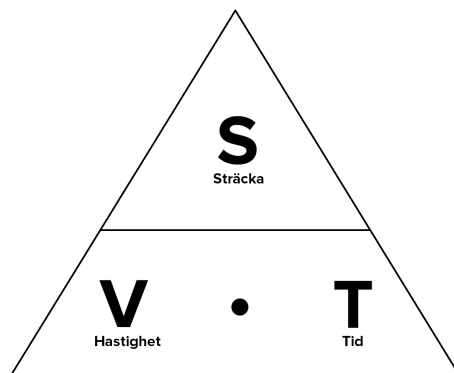
Sambandet mellan sträcka, hastighet och tid är

$$s = v \cdot t.$$

Det visas ofta med SVT-triangeln i Figur 1.1.

<sup>1</sup>En storhet är något man kan mäta eller räkna, till exempel antal, längd eller massa.

<sup>2</sup>Ett **uttryck** är en matematisk beskrivning, till exempel  $150 + 15 \cdot 17$  eller  $2(x + 4)$ .



**Figur 1.1:** SVT-triangeln som minnesbild för sambandet mellan sträcka ( $s$ ), hastighet ( $v$ ) och tid ( $t$ ). Där  $s = v \cdot t$ .

Om du cyklar 30 km med hastigheten 12 km/h och tiden är  $t$ , får vi

$$30 = 12t.$$

Dividera båda leden med 12:

$$t = \frac{30}{12} = 2.5 \text{ h.}$$

Alltså tar det 2 timmar och 30 minuter.<sup>3</sup>

## Begrepp

**Variabel.** Ett värde som kan vara okänt eller ändras, till exempel  $x$  i  $100 + 20x$ .

**Konstant.** Ett fast värde, till exempel 100 och 20 i  $100 + 20x$ .

**Uttryck.** En matematisk skrivning, till exempel  $100 + 20x$ .

**Numeriskt uttryck.** Ett uttryck med bara tal, till exempel  $100 + 20 \cdot 3$ .

**Algebraiskt uttryck.** Ett uttryck med minst en variabel, till exempel  $100 + 20x$ .

**Koefficient.** Talet framför en variabel, till exempel 20 i  $20x$ .

**Term.** En del av ett uttryck som skiljs med plus eller minus, till exempel 100 och  $20x$  i  $100 + 20x$ .

**Likhet.** Två uttryck med samma värde, till exempel  $100 + 20 \cdot 3 = 160$ .

**Ekvation.** En likhet med variabler, till exempel  $100 + 20x = 220$ .

**Identitet.** En likhet som gäller för alla tillåtna värden, till exempel  $2(x + 3) = 2x + 6$ .

**Olikhet.** Ett påstående med  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$  eller  $\geq$ , till exempel  $100 + 20x \leq 200$ .

**Linjär.** Ett uttryck eller en ekvation där variabeln bara är upphöjd till 1, till exempel  $2x + 5$ .

## Lösningsmetoder

När man löser en ekvation gör man samma operation i båda leden tills variabeln blir ensam. Ofta gör man så här:

1. välj vilken variabel som ska lösas ut,
2. förenkla vid behov,
3. samla termer,
4. multiplicera eller dividera så att variabeln blir ensam.

<sup>3</sup>Skrivningarna  $ab$  och  $12b$  betyder samma sak som  $a \cdot b$  respektive  $12 \cdot b$ .

**Exempel 1.2:**

$$a = \frac{c}{b} \implies ab = c \implies b = \frac{c}{a}.$$

$$a = bc \implies b = \frac{a}{c}.$$

$$a = b - c \implies b = a + c.$$

$$a = b + c \implies b = a - c.$$

**Exempel 1.3: Tangentiell hastighet som en linjär ekvation**

För stjärnor används ofta sambandet

$$v_t = 4.74 \mu d,$$

där  $v_t$  mäts i km/s,  $\mu$  i "/yr och  $d$  i parsec.

**a) Lös ut  $d$ .**

$$d = \frac{v_t}{4.74 \mu}.$$

**b) Lös ut  $\mu$ .**

$$\mu = \frac{v_t}{4.74 d}.$$

**c) Räkneexempel.** Om  $\mu = 0.50$  "/yr och  $d = 20$  pc, så är

$$v_t = 4.74 \cdot 0.50 \cdot 20 = 47.4 \text{ km/s}.$$

**Förenkling av uttryck**

Att **förenkla ett uttryck** betyder att skriva om det utan att ändra dess värde. Det är inte samma sak som att **lösa en ekvation**.

Till exempel kan

$$A + 2 - 2 = A$$

eftersom  $+2$  och  $-2$  tar ut varandra.

Förenkling handlar om att skriva om ett uttryck till en mer praktisk form, till exempel genom att samla termer, förkorta bråk eller använda gemensam nämnare.

Vanliga sätt att förenkla:

- \* räkna ihop tal,
- \* samla lika termer,
- \* förkorta bråk,
- \* använda gemensam nämnare.

**Exempel 1.4: Förenkla uttryck**

$$2x + 5x = 7x, \quad 3y - y = 2y.$$

$$2x + 3 + 4x - 1 = 6x + 2.$$

$$\frac{12x}{3} = 4x, \quad \frac{6x}{9} = \frac{2x}{3}.$$

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} = \frac{5x}{6}.$$

$$\frac{x}{4} + \frac{3x}{4} = \frac{4x}{4} = x.$$

Förenkling är inte lösning, uttrycket nedan till exempel är bara en omskrivning

$$x + 3x = 4x$$

Dock så har ekvationen nedan en lösning, eftersom den innehåller en direkt likhet:

$$3x + 9 = 29 - x \implies 4x = 20 \implies x = 5.$$

**1.2 Distributiva, Associativa och Kommutativa lagen**

Dessa räknelagar ändrar inte värdet på ett uttryck och är bara metoder att förenkla.

**Distributiva lagen**

$$a(b + c) = ab + ac, \quad a(b - c) = ab - ac.$$

Åt andra hållet:

$$ab + ac = a(b + c).$$

Exempel:

$$3(x + 4) = 21 \implies 3x + 12 = 21 \implies 3x = 9 \implies x = 3.$$

**Associativa lagen**

För addition och multiplikation spelar gruppering ingen roll:<sup>4</sup>

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc).$$

**Kommutativa lagen**

För addition och multiplikation spelar ordningen ingen roll:<sup>5</sup>

$$a + b = b + a, \quad ab = ba.$$

Till exempel:

$$7 + x = x + 7.$$

<sup>4</sup>Detta gäller inte allmänt för subtraktion och division. Till exempel är  $(10 - 5) - 2 = 3$  men  $10 - (5 - 2) = 7$ , och  $(12/6)/2 = 1$  men  $12/(6/2) = 4$ .

<sup>5</sup>Detta gäller inte allmänt för subtraktion och division.

### 1.3 Inversa operationer

När man löser ekvationer använder man operationer som "ångrar" varandra:

$$+ \text{ och } -, \quad \cdot \text{ och } /.$$

Exempel:

$$3x + 5 = 17 \implies 3x = 12 \implies x = 4.$$

$$\frac{x}{4} = 6 \implies x = 24.$$

Man får aldrig dividera med 0. Vissa operationer kräver också försiktighet, till exempel ger  $x^2 = 9$  två lösningar:  $x = 3$  och  $x = -3$ .<sup>6</sup>

### 1.4 Faktorisering

Faktorisering betyder att skriva om ett tal eller uttryck som en **produkt** av enklare faktorer. Det används bland annat för att förkorta bråk.

#### Primtalsfaktorisering

Alla heltal större än 1 kan skrivas som en produkt av primtal. Till exempel:

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7.$$

Detta är användbart när man vill förenkla bråk eller hitta gemensamma nämnare.

#### Exempel 1.5: Primtalsfaktorisera 84

$$84/2 = 42, \quad 42/2 = 21, \quad 21/3 = 7 \implies 84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

#### Exempel 1.6: Förenkla ett bråk med primtalsfaktorisering

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7, \quad 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7.$$

Då får vi

$$\frac{84}{126} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{2}{3}.$$

#### Faktorisering av variabeluttryck

Man kan också bryta ut gemensamma faktorer ur uttryck med variabler:

$$xy + y^2 = y(x + y) \implies \frac{xy + y^2}{y} = \frac{y(x + y)}{y} = x + y, \quad y \neq 0.$$

Potenser hjälper oss att se faktorer:

$$x^2 = x \cdot x, \quad x^3 = x \cdot x \cdot x.$$

Till exempel:

$$x^3 + x^2 = x^2(x + 1).$$

#### Exempel 1.7: Faktorisera ett uttryck med variabler

$$x^2y + xy^2 = xy(x + y).$$

<sup>6</sup>Rotutdragnin är "nästan" inversen till kvadrering. Mer om detta i avsnittet om exponenter.

**Exempel 1.8: Faktorisera ett uttryck med en gemensam variabel**

$$5y + 10 = 5(y + 2).$$

**1.5 Ekvationer med flera variabler**

En ekvation med flera variabler räcker ofta inte för att bestämma alla variabler. Till exempel har följande ekvationer oändligt med par av lösningar (t ex (5,5))

$$x + y = 10$$

**Vad är ett ekvationssystem?**

När flera ekvationer ska gälla samtidigt kallas det ett **ekvationssystem**. Till exempel:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

**För linjära ekvationssystem finns tre huvudfall:**

1. exakt en lösning,
2. ingen lösning,
3. oändligt många lösningar.

**Additionsmetoden**

Man adderar eller subtraherar ekvationer led för led för att eliminera en variabel.

**Exempel 1.9: En lösning med additionsmetoden**

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Addera ekvationerna:

$$(2x + y) + (2x - y) = 11 + 1 \implies 4x = 12 \implies x = 3.$$

Sätt in i första ekvationen:

$$2 \cdot 3 + y = 11 \implies y = 5.$$

Alltså är lösningen  $(x,y) = (3,5)$ .

**Exempel 1.10: Ingen lösning med additionsmetoden**

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

Subtraktion ger

$$0 = 3,$$

vilket är omöjligt. Alltså finns ingen lösning.<sup>7</sup>

<sup>7</sup>I tävlingsproblem bör uppgiften normalt ha en lösning. Om dina ekvationer inte går ihop har du troligen gjort något fel.

**Exempel 1.11: Oändligt många lösningar med additionsmetoden**

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

Subtraktion ger

$$0 = 0.$$

Den andra ekvationen ger ingen ny information, så systemet har oändligt många lösningar.<sup>8</sup>

**Substitutionsmetoden**

Man löser ut en variabel ur en ekvation och sätter in i den andra.

**Exempel 1.12: En lösning med substitutionsmetoden**

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Lös ut  $x$  ur första ekvationen:

$$x = 10 - y.$$

Sätt in i den andra:

$$(10 - y) - y = 2 \implies 10 - 2y = 2 \implies y = 4.$$

Då blir

$$x = 10 - 4 = 6.$$

Alltså är lösningen  $x = 6, y = 4$ .

**Sammanfattning Algebra**

- \* Algebra använder bokstäver för okända eller varierande storheter.
- \* **Variabler** kan ändras, **konstanter** är fasta.
- \* **Uttryck** är en beskrivning medan **ekvationer** ger lösningar.
- \* När man löser en ekvation gör man samma operation i båda leden.
- \* Detta bygger på **inversa operationer**, till exempel addition och subtraktion.
- \* Man behöver ofta först **förenkla uttryck**.
- \* Viktiga räknelagar är den **distributiva**, **associativa** och **kommutativa**.
- \* **Faktorisering** används för att skriva om uttryck som produkter av enklare faktorer.
- \* Ekvationer med flera variabler kräver ofta flera ekvationer, alltså ett **ekvationssystem**.
- \* Ekvationssystem kan ha en lösning, ingen lösning eller oändligt många lösningar.
- \* Två vanliga metoder är **additionsmetoden** och **substitutionsmetoden**.

<sup>8</sup>Vi kan också se detta eftersom den andra ekvationen är en direkt omskrivning av den första.

## 2 Linjära funktioner

### 2.1 Vad är en funktion egentligen?

I vardagligt språk betyder **funktion** ofta ungefär uppgift eller roll. I matematik betyder det något mer exakt.

Inom **programmering** kan en funktion ses som en maskin: man stoppar in något och får ut ett resultat. I **matematiken** är en funktion en regel som till varje tillåtet invärde kopplar **precis ett** utvärde. Samma indata måste alltså alltid ge samma utdata. En funktion kan beskrivas med en formel, tabell eller graf.

Ett bra sätt att tänka är som en **funktionsmaskin**: man matar in ett tal, funktionen gör sin regel, och ett nytt tal kommer ut.

Ofta skriver man en funktion som  $y = f(x)$ . Här är  $x$  invärdet och  $f(x)$  utvärdet. Om

$$f(x) = 2x + 1,$$

så blir till exempel

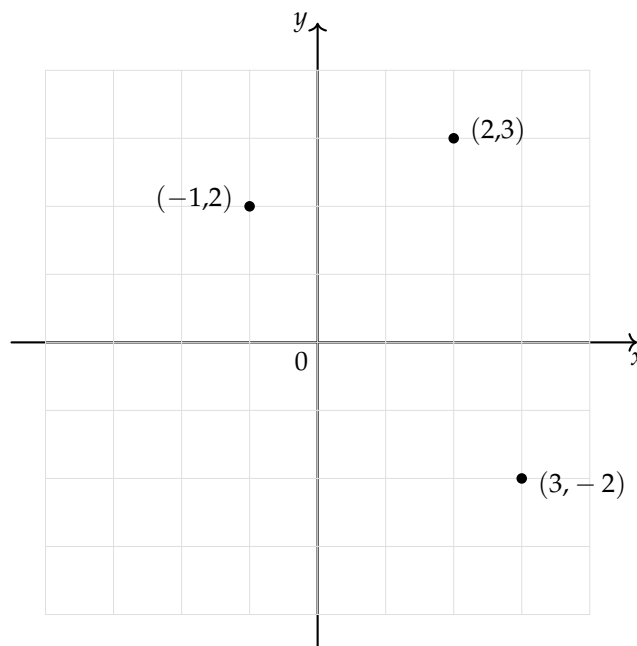
$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

### 2.2 Talplanet

Talplanet<sup>9</sup> används för att visa alla möjliga talpar  $(x,y)$ . Varje punkt motsvarar exakt ett sådant par.

Den vågräta axeln är **x-axeln** och den lodräta är **y-axeln**. Punkten där de skär varandra kallas **origo** och har koordinaterna  $(0,0)$ .

Punkten  $(2,3)$  betyder 2 steg åt höger och 3 steg upp. Punkten  $(-1,2)$  betyder 1 steg åt vänster och 2 steg upp.



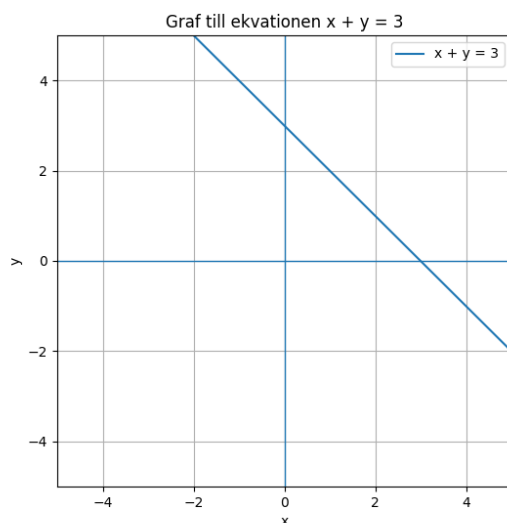
**Figur 1.2:** Talplanet. Varje punkt motsvarar ett värdepar  $(x,y)$ .

<sup>9</sup>Talplanet kallas också xy-planet eller det kartesiska planet.

Talplanet är viktigt eftersom ekvationer med två variabler kan tolkas som alla punkter  $(x,y)$  som uppfyller ekvationen. Till exempel beskriver

$$x + y = 3$$

alla punkter där summan blir 3. Dessa ligger på en rät linje.



Figur 1.3: Linjen  $x + y = 3$  ritad på talplanet med hjälp av Python

## 2.3 Funktioner som linjer och skärningar av linjer

Nu tittar vi på funktioner vars graf är en **rät linje**. De är vanliga när en storhet förändras med **konstant takt**.

### Proportionalitet och linjära samband

Om en storhet ökar lika mycket varje gång en annan ökar med ett visst steg, är sambandet **linjärt**. Om du till exempel får 10 kronor per timme, så ökar lönen med samma belopp för varje timme:

$$1 \mapsto 10, \quad 2 \mapsto 20, \quad 3 \mapsto 30.$$

Förändringen är alltså konstant.

### Funktioner som linjer

En linjär funktion skrivs oftast

$$y = kx + m. \tag{1.1}$$

Här är  $k$  och  $m$  konstanter, medan  $x$  och  $y$  är variabler.

**Lutningen**  $k$ . Den anger hur mycket  $y$  ändras när  $x$  ändras.

**Startvärdet**  $m$ . Det är funktionens värde när  $x = 0$ , alltså där linjen skär  $y$ -axeln.

Om

$$y = 2x + 150,$$

så ökar  $y$  med 2 när  $x$  ökar med 1, och

$$y = 150 \quad \text{när} \quad x = 0.$$

**Lutning som  $\Delta y/\Delta x$** 

Lutningen kan också skrivas

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (1.2)$$

Det betyder förändringen i  $y$  delat med förändringen i  $x$ .

Om man går från punkten  $(1,3)$  till punkten  $(3,7)$ <sup>10</sup>, så är

$$\Delta x = 3 - 1 = 2, \quad \Delta y = 7 - 3 = 4, \quad \text{så att} \quad k = \frac{4}{2} = 2.$$

**Skärning med  $y$ -axeln är  $m$** 

I formen  $y = kx + m$  är  $m$  linjens skärning med  $y$ -axeln. Det ser man genom att sätta  $x = 0$ :

$$y = k \cdot 0 + m = m \implies m = f(0).$$

**Enpunktsformeln**

Om man känner en punkt  $(x_1, y_1)$  på linjen och lutningen  $k$ , kan man skriva

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (1.3)$$

Om en linje går genom  $(2,5)$  och har lutningen 3, får vi

$$y - 5 = 3(x - 2).$$

**Skärning med axlarna**

**Skärning med  $y$ -axeln** fås genom att sätta  $x = 0$ .

**Skärning med  $x$ -axeln** fås genom att sätta  $y = 0$ .

Om

$$y = 2x + 4,$$

så är skärningen med  $y$ -axeln  $(0,4)$ . För  $x$ -axeln sätter vi  $y = 0$ :

$$0 = 2x + 4 \implies x = -2.$$

Alltså är skärningen  $(-2,0)$ .

**Linjer som samband i uppgifter**

Linjära funktioner låter oss beskriva ett helt samband med en enda formel.

Om en bil kör med konstant hastighet  $v$ , så gäller  $s = vt$ . Om bilen redan från början är 5 km från startpunkten, blir sambandet

$$s = vt + 5.$$

Här är lutningen hastigheten och startvärdet startpositionen.

**Ett exempel från fysik och IOAA Jr**

I fysik och astronomi beskriver funktioner ofta hur en storhet beror på en annan. I ett hastighet-tid-diagram med konstant hastighet blir grafen vågrät.

Om en kropp rör sig med konstant hastighet 3 m/s under 5 s, så kan hastigheten skrivas som  $v(t) = 3.4$ . Grafen blir en vågrät linje. Arean under grafen är en rektangel med höjd 3 och bredd 5:

$$3 \cdot 5 = 15 \text{ (Detta är sträckan kroppen färdas)}$$

<sup>10</sup>Med en punkt skrivs dess  $x$ -koordinat först, och sedan  $y$ -koordinaten, separerade av ett kommatecken. Till exempel gäller  $x = 2$  och  $y = 3$  för punkten  $(2,3)$ .

### Skärningar av linjer

När två linjer möts har de en **skärningspunkt**. Den ligger på båda linjerna samtidigt och uppfyller därför båda ekvationerna.

Anta att vi har

$$y = 2x + 1 \quad \text{och} \quad y = -x + 4.$$

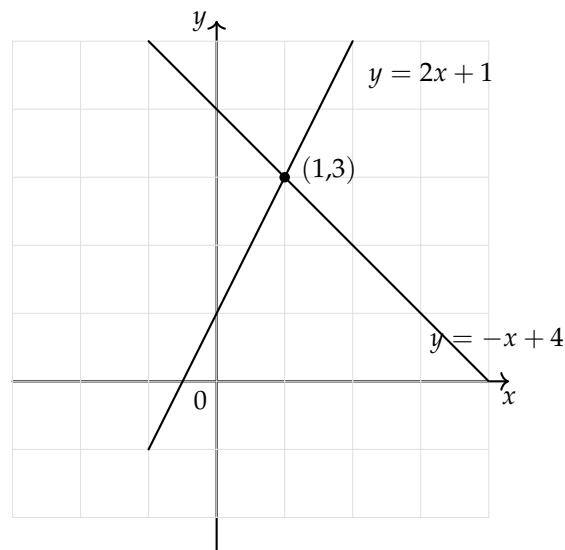
I skärningspunkten måste  $y$  vara samma, alltså

$$2x + 1 = -x + 4 \implies 3x = 3 \implies x = 1.$$

Sätt in:

$$y = 2 \cdot 1 + 1 = 3. \text{ Skärningspunkten är alltså: } (1,3).$$

Det vill säga linjerna skär varandra vid  $x=1$  och  $y=3$ .



**Figur 1.4:** Två linjer och deras skärningspunkt. Punkten  $(1,3)$  ligger på båda linjerna samtidigt och är därför lösningen till ekvationssystemet.

Skärningspunkten mellan två linjer är alltså samma sak som lösningen till ett ekvationssystem.

### Exempel 2.1: Egenrörelse som funktion av tid

I astronomi ändras stjärnor långsamt sin position på himlen. Under kortare tidsintervall kan man ofta approximera läget som en **linjär funktion av tiden**.

Anta att en stjärnas rektascension<sup>11</sup> beskrivs av

$$x(t) = 0.20t + 15.3,$$

där  $t$  mäts i år och  $x$  i bågsekunder.

Här betyder 0.20 att koordinaten ökar med 0.20 bågsekunder per år, och 15.3 är värdet när  $t = 0$ .

**Fråga 1: Vad är koordinaten efter 5 år?**

$$x(5) = 0.20 \cdot 5 + 15.3 = 16.3.$$

<sup>11</sup>Rektascension är ett koordinatmått på himlen, ungefär som longitud fast på himmelssfären.

**Fråga 2: Efter hur lång tid har koordinaten nått 17.1 bågsekunder?**

$$0.20t + 15.3 = 17.1 \implies 0.20t = 1.8 \implies t = 9.$$

**Fråga 3: Hur tolkar man lutningen?**

Lutningen är

$$k = 0.20,$$

vilket betyder att koordinaten ökar med 0.20 bågsekunder per år.

**Sammanfattning funktioner som linjer och skärningar av linjer**

- \* En **funktion** kopplar varje invärde till exakt ett utvärde.
- \* En funktion kan beskrivas med formel, tabell eller graf.
- \* Om grafen är en rät linje är funktionen **linjär**.
- \* En linjär funktion skrivs ofta  $y = kx + m$ .
- \*  $k$  är **lutningen**, alltså förändringen i  $y$  när  $x$  ändras.
- \*  $m$  är **startvärdet**, alltså  $f(0)$  och linjens skärning med  $y$ -axeln.
- \* Lutningen kan beräknas med  $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .
- \* Linjära funktioner beskriver samband med **konstant takt**.
- \* Två linjers skärningspunkt är samma sak som lösningen till ett ekvations-system.<sup>a</sup>
- \* Därför hänger algebra och funktioner nära ihop.

<sup>a</sup>Man kan alltså också lösa ekvationer grafiskt genom att hitta skärningen, men det är ofta mindre praktiskt.

### 3 Trigonometri

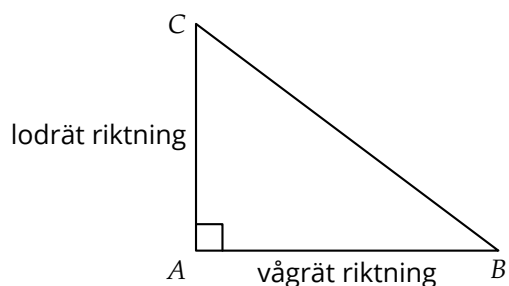
Trigonometri handlar om **vinklar, trianglar** och samband mellan längder. Namnet betyder ungefär *triangelmätning*. Många klassiska problem, som att bestämma höjder, avstånd eller riktningar, leder naturligt till trigonometri.

I IOAA Junior dyker trigonometri upp när ljusstrålar, skuggor eller observationsriktningar bildar trianglar. Då behöver man ett språk för hur **vinklar och längder hänger ihop**. Det är just vad trigonometri ger.

Vi börjar med **rätvinkliga trianglar**, sedan Pythagoras sats och därefter de trigonometriska funktionerna sinus, cosinus och tangens.

#### 3.1 Rätta trianglar

En **rätvinklig triangel** är en triangel med en vinkel på  $90^\circ$ . De två sidor som möts i den räta vinkeln är **vinkelräta**.



**Figur 1.5:** En rätvinklig triangel. De två sidorna vid den räta vinkeln möts vinkelrätt.

Räta trianglar är viktiga eftersom de ofta uppstår naturligt i figurer med höjd och bredd, till exempel skuggor, byggnader och observationslinjer.

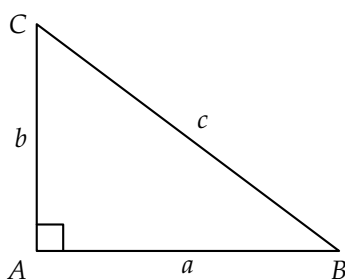
I en rätvinklig triangel kallas de två sidorna vid den räta vinkeln **kateter**. Sidan mitt emot den räta vinkeln kallas **hypotenusan** och är alltid längst.

### Pythagoras sats

Om en rätvinklig triangel har kateter  $a$  och  $b$  samt hypotenusan  $c$ , så gäller

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (1.4)$$

Detta är **Pythagoras sats**. Känner man två sidlängder kan man alltså räkna ut den tredje.



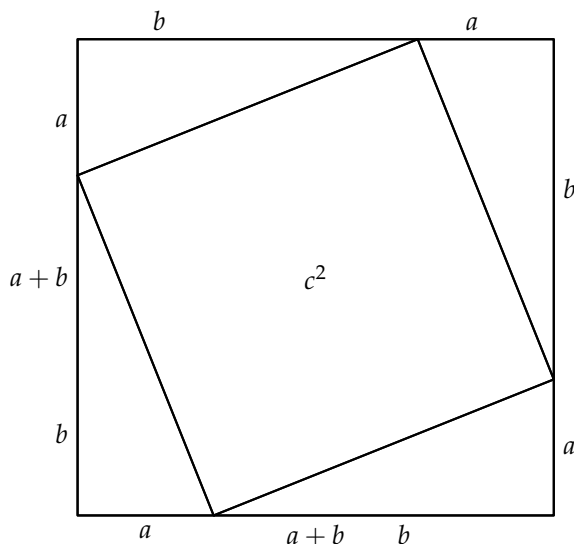
**Figur 1.6:** En rätvinklig triangel med kateterna  $a$  och  $b$ , samt hypotenusan  $c$ .

Om till exempel  $a = 3$  och  $b = 4$ , så blir

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \implies c = 5.$$

### Ett geometriskt bevis med en kvadrat

Vi bygger en kvadrat med sidlängden  $a + b$  och placerar fyra likadana räta trianglar i den.



**Figur 1.7:** En kvadrat med sida  $a + b$ , uppdelad i fyra räta trianglar och en inre kvadrat med sida  $c$ .

Arean av den stora kvadraten är  $(a + b)^2$ . Samma area är också summan av de fyra trianglarna och den inre kvadraten:

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 \\ &= 2ab + c^2.\end{aligned}$$

Utvecklar vi vänsterledet<sup>12</sup> får vi

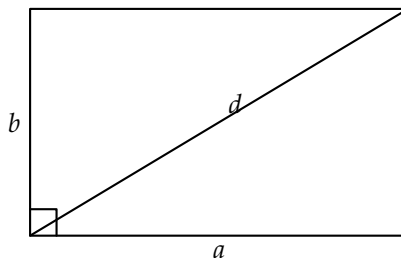
$$\begin{aligned}a^2 + 2ab + b^2 &= 2ab + c^2 \\ \implies a^2 + b^2 &= c^2.\end{aligned}$$

Pythagoras sats är viktig eftersom den låter oss bestämma en okänd sidlängd så fort vi hittar en rätvinklig triangel i en figur.

### Var dyker räta trianglar upp?

Räta trianglar dyker ofta upp gömda i andra figurer. Några vanliga exempel är:

**Kvadrater och rektanglar.** En diagonal delar figuren i två räta trianglar.



**Figur 1.8:** En diagonal i en rektangel ger en rät triangel där  $a^2 + b^2 = d^2$ .

<sup>12</sup>Från distributiva lagen:  $(a + b)^2 = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$ . Detta kallas också kvadreringsregeln.

**Kuber och rymdgeometri.** Pythagoras sats kan användas först på en sidoyta och sedan en gång till i rymden. För en kub med sidlängd  $a$  blir rymddiagonalen  $R$  given av

$$R^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2.$$

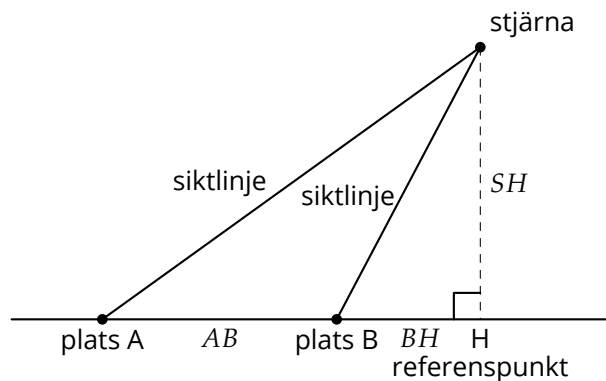
**Cirklar.** Om en triangel är inskriven i en cirkel och ena sidan är en diameter, blir vinkeln vid den tredje punkten rät. Detta kallas **Thales sats**.

**Ellipser och koordinatgeometri.** Hjälpelinjer kan skapa räta trianglar som gör figuren lättare att analysera.

**Avstånd i fysik och astronomi.** Ett avstånd kan ofta delas upp i två vinkelräta komponenter, så att Pythagoras sats kan användas.

### Exempel 3.1: Två observatörer och en stjärna som referens

Två observatörer står på olika platser och tittar mot samma stjärna. Med en lodrät hjälpelinje från stjärnan till marken kan figuren delas upp i räta trianglar.



**Figur 1.9:** Två observatörer tittar mot samma stjärna. Med en lodrät hjälpelinje kan figuren delas upp i räta trianglar.

Då gäller till exempel

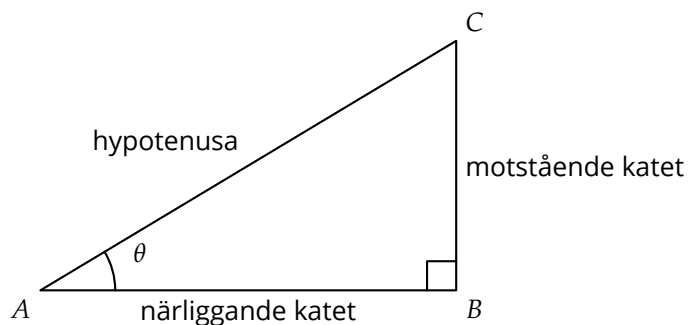
$$BH^2 + SH^2 = BS^2, \quad AH^2 + SH^2 = AS^2.$$

## 3.2 De trigonometriska funktionerna

Pythagoras sats innehåller inga vinklar. Om man i stället känner en vinkel och en längd behöver man **sinus**, **cosinus** och **tangens**. De beskriver förhållanden mellan sidorna i en rät triangel.

### Definition av de trigonometriska funktionerna

Vi utgår från en rätvinklig triangel och väljer en spetsig vinkel  $\theta$ .



**Figur 1.10:** Namnen på sidorna beror på vilken vinkel man utgår från. Här är  $\theta$  den valda vinkeln.

För vinkeln  $\theta$  gäller:

- ★ **hypotenusan** är sidan mitt emot den räta vinkeln,
- ★ **motstående katet** ligger mitt emot  $\theta$ ,
- ★ **närliggande katet** ligger intill  $\theta$ .

Definitionerna är:

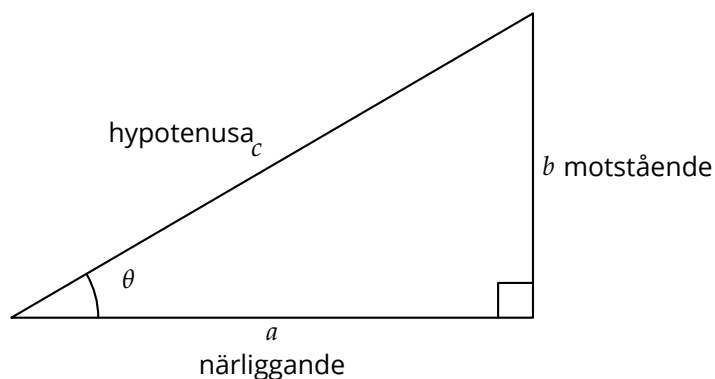
$$\sin(\theta) = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusa}}, \quad \cos(\theta) = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusa}}, \quad \tan(\theta) = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}$$

De beskriver alltså **kvoter** mellan sidlängder, inte själva längderna.

### Att använda funktionerna

Börja alltid så här:

1. välj vinkeln,
2. hitta hypotenusan,
3. avgör vilken katet som är motstående och vilken som är närliggande.



**Figur 1.11:** Om vinkeln  $\theta$  är vald vid vänstra hörnet, så är  $a$  den närliggande kateten,  $b$  den motstående kateten och  $c$  hypotenusan.

För figuren ovan gäller

$$\sin(\theta) = \frac{b}{c}, \quad \cos(\theta) = \frac{a}{c}, \quad \tan(\theta) = \frac{b}{a}.$$

### Vad man får stoppa in och vad man får ut

Här använder vi spetsiga vinklar mellan  $0^\circ$  och  $90^\circ$ . Om man sätter in en sådan vinkel i sinus, cosinus eller tangens får man ut ett **sidförhållande**.

Till exempel är

$$\sin(30^\circ), \quad \cos(45^\circ), \quad \tan(60^\circ)$$

alla vanliga tal utan enhet.

### Mini-exempel 3.1: Beräkna ett sinusvärde

Om motstående katet är 3 cm och hypotenusan 5 cm, så är

$$\sin(\theta) = \frac{3}{5} = 0.6.$$

### För vinklar mellan $0^\circ$ och $90^\circ$ gäller:

- \*  $0 < \sin(\theta) \leq 1$ ,
- \*  $0 < \cos(\theta) \leq 1$ ,
- \*  $\tan(\theta) > 0$ .

### När vinkeln ökar:

- \* sinus ökar,
- \* cosinus minskar,
- \* tangens ökar.

### Några vanliga värden

$\theta$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\theta)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ej definierad

Vinklarna  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  och  $60^\circ$  dyker upp ofta.<sup>13</sup>

## 3.3 Invers till de trigonometriska funktionerna

En **invers funktion** går baklänges genom en funktionsregel. Om

$$f(x) = 2x + 1, \quad \text{så är den inversa funktionen } f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}.$$

### Invers operation och invers funktion

En **invers operation** ångrar ett steg:  $+5$  ångras av  $-5$ ,  $\cdot 3$  ångras av  $/3$ .

En **invers funktion** ångrar hela processen. Därför gäller

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{och} \quad f(f^{-1}(x)) = x.$$

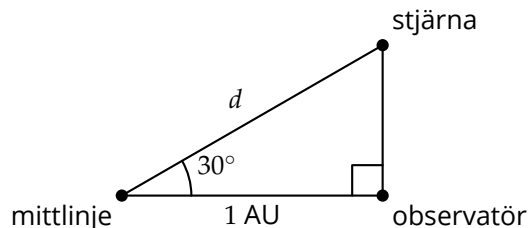
De inversa trigonometriska funktionerna tar oss från ett **sidförhållande** tillbaka till en **vinkel**. Alla funktioner har dock inte en invers som själv är en funktion för alla invärden.

<sup>13</sup>Du får dock räknare som kan räkna med funktionerna.

**Exempel 3.2: Förenklad parallaxidé**

Anta att en närliggande katet är 1 AU och att vinkeln är  $30^\circ$ . Om hypotenusan är  $d$ , så gäller

$$\cos(30^\circ) = \frac{1}{d} \implies d = \frac{1}{\cos(30^\circ)} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.15 \text{ AU}.$$



**Figur 1.12:** En mycket förenklad modell av parallax.

**3.4 Radianer**

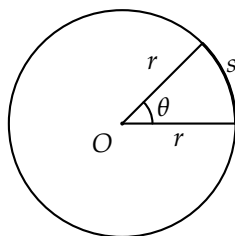
Grader fungerar bra, men i matematiken vill man ofta ha ett vinkelmått som är direkt kopplat till cirkeln. Det är **radianer**.

**Vinklar som andel av ett helt varv**

- ★  $90^\circ$  är ett kvarts varv,
- ★  $180^\circ$  är ett halvt varv,
- ★  $360^\circ$  är ett helt varv.

**Idén bakom radianer** Om en vinkel i en cirkel skär ut en båge med längd  $s$  i en cirkel med radie  $r$ , så definieras radianmättet som

$$\theta = \frac{s}{r}. \quad (1.5)$$



**Figur 1.13:** En vinkel i radianer definieras med formeln  $\theta = \frac{s}{r}$ , där  $s$  är båglängden och  $r$  är radien.

**Varför blir ett helt varv  $2\pi$  radianer?** Ett helt varv har båglängden lika med cirkelns omkrets, alltså  $2\pi r$ . Då blir

$$\theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi.$$

Alltså:

$$360^\circ = 2\pi \text{ rad}, \quad 180^\circ = \pi \text{ rad}, \quad 90^\circ = \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

**Varför är radianer användbara?** Radianer passar naturligt ihop med cirklar och trigonometriska funktioner. Till exempel blir båglängden

$$s = r\theta \quad \text{när } \theta \text{ mäts i radianer.}$$

**Fördelar och nackdelar** Fördelen med radianer är att radianer är naturligt kopplad i till cirkeln som gör att många formler blir enklare och kräver inga konverteringar. I nästan alla formler som kommer i boken använder radianer **underförstådd!** Nackdelen är att Radianer blir svårare att skrivas ut då den oftast skrivs med på eller med bråk, vilket gör att den känns mindre intuitiv i början när man är van med att beteckna vinklar med heltal i grader.

**Konvertering mellan grader och radianer** Från grader till radianer:  $\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{grader}} \cdot \frac{\pi}{180}$ . och från radianer till grader:  $\theta_{\text{grader}} = \theta_{\text{rad}} \cdot \frac{180}{\pi}$ .

### Några vanliga vinklar

grader	0°	30°	45°	60°	90°
radianer	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

grader	180°	270°	360°
radianer	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$

#### Exempel 3.3: Omvandla grader till radianer

$$60^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}.$$

#### Exempel 3.4: Omvandla radianer till grader

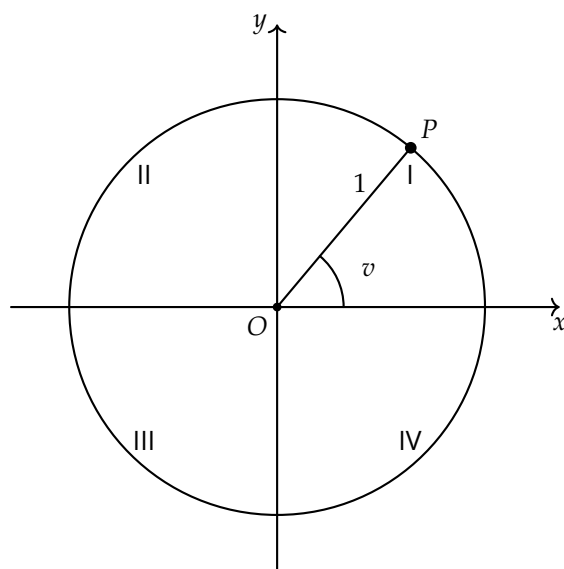
$$\frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 135^\circ.$$

**Kommentar** Kontrollera alltid om räknaren är inställd på **grader** eller **radianer**.

## 3.5 Enhetscirkeln

För att definiera trigonometriska funktioner för alla vinklar använder man **enhetscirkeln**, alltså en cirkel med centrum i origo och radie 1.

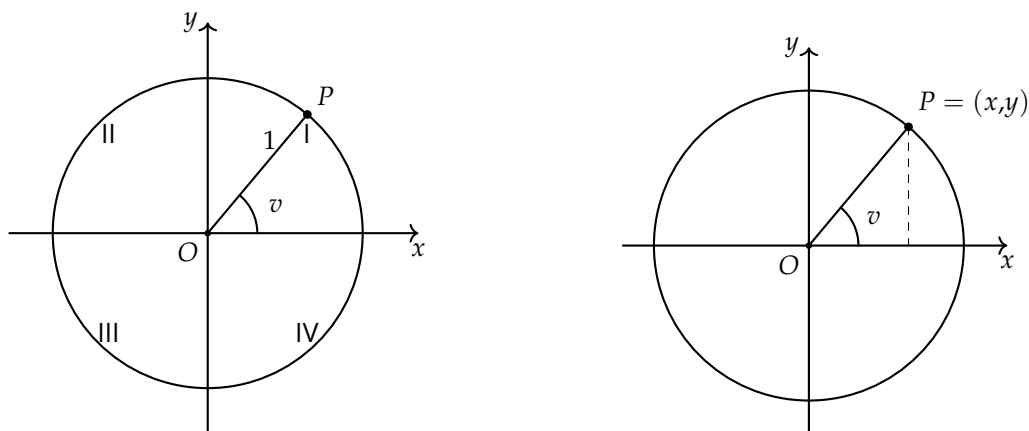
Vinkeln mäts från den positiva  $x$ -axeln och positiv riktning är **motsols**. Axlarna delar planet i fyra **kvadranter**.



**Figur 1.14:** Enhetscirkeln har radie 1, centrum i origo, och vinkeln  $v$  mäts motsols från den positiva  $x$ -axeln.

### Hur läser man av trigonometriska värden från cirkeln?

Om  $P = (x, y)$  ligger på enhetscirkeln, så bildar radien och en lodrät hjälplinje en rätvinklig triangel med hypotenusan 1.



(a) Enhetscirkeln med vinkeln  $v$  och kvadranterna.

(b) Punkten  $P = (x, y)$  ger en rätvinklig triangel med hypotenusan 1.

**Figur 1.15:** Enhetscirkeln. Till vänster visas vinkeln  $v$  och kvadranterna. Till höger visas hur en punkt  $P = (x, y)$  på enhetscirkeln ger en rätvinklig triangel som gör att man kan läsa av sinus och cosinus.

Då får vi direkt

$$\sin(v) = \frac{y}{1} = y, \cos(v) = \frac{x}{1} = x \implies \text{Alltså kan varje punkt på enhetscirkeln skrivas som: } P = (\cos v, \sin v).$$

### Tangens som kvot av sinus och cosinus<sup>14</sup>

$$\text{eftersom } \tan(v) = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{1}}{\frac{x}{1}} \implies \tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}, \quad \cos(v) \neq 0.$$

### Tecken i olika kvadranter

Kvadrant	$\sin(v)$	$\cos(v)$	$\tan(v)$
I	+	+	+
II	+	-	-
III	-	-	+
IV	-	+	-

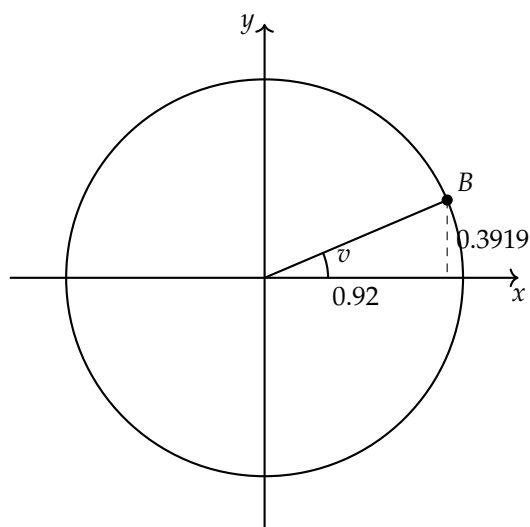
### Exempel 3.5: Hitta vinkeln från en punkt på enhetscirkeln

Om  $B = (0.92, 0.3919)$ , så gäller

$$\cos(v) = 0.92.$$

Därför

$$v = \arccos(0.92) \approx 23.07^\circ.$$



**Figur 1.16:** Punkten  $B = (0.92, 0.3919)$  ligger i första kvadranten, så vinkeln blir spetsig.

### Två viktiga samband från enhetscirkeln

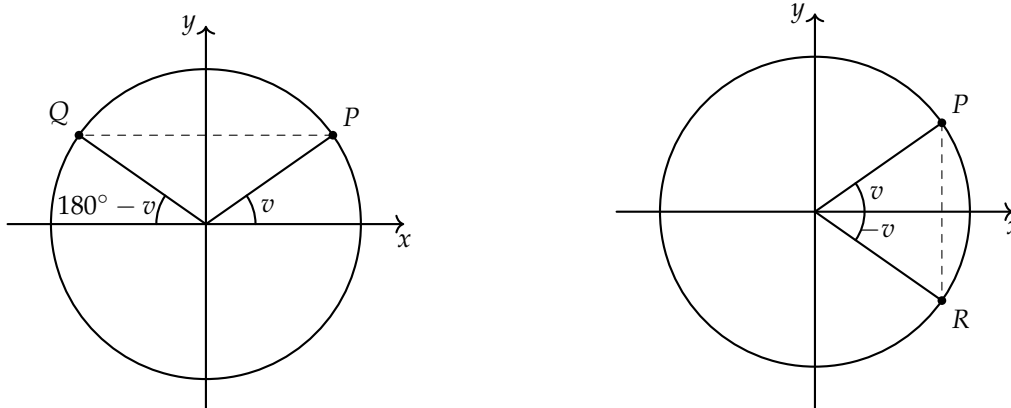
Om två punkter är symmetriska kring  $y$ -axeln, så har de samma  $y$ -koordinat:

$$\sin(v) = \sin(180^\circ - v).$$

Om två punkter är symmetriska kring  $x$ -axeln, så har de samma  $x$ -koordinat:

$$\cos(v) = \cos(-v).$$

<sup>14</sup>Här vet vi att  $\sin = y/1$  och  $\cos = x/1$ . Faktumet är att  $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$  oavsätt om vi använder enhetscirkeln eller inte!



(a) Punkterna  $P$  och  $Q$  har samma  $y$ -koordinat, alltså samma sinusvärde.

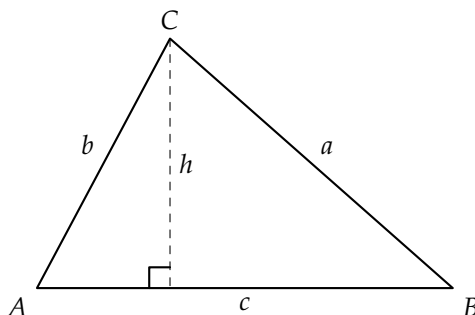
(b) Punkterna  $P$  och  $R$  har samma  $x$ -koordinat, alltså samma cosinusvärde.

**Figur 1.17:** Två viktiga symmetrier i enhetscirkeln. Till vänster visas symmetri kring  $y$ -axeln, vilket ger  $\sin(v) = \sin(180^\circ - v)$ . Till höger visas symmetri kring  $x$ -axeln, vilket ger  $\cos(v) = \cos(-v)$ .

### Sinussatsen

Sinussatsen gäller för **alla trianglar**. Om sidorna  $a, b, c$  ligger mitt emot vinklarna  $A, B, C$ , så gäller

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \quad (1.6)$$



**Figur 1.18:** En triangel där vi ritar in en höjd  $h$ . Med höjden kan vi skapa räta trianglar och härleda sinussatsen.

Med höjden  $h$  får vi

$$\sin A = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \sin A,$$

$$\sin B = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \sin B.$$

Därför är

$$b \sin A = a \sin B \Rightarrow \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}.$$

På samma sätt får man

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Alltså

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, \quad (1.7)$$

och därmed också

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \quad (1.8)$$

### Mini-exempel 3.2: Använd sinussatsen

Om  $A = 30^\circ$ ,  $B = 45^\circ$  och  $a = 5$ , så blir

$$b = 5 \cdot \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}/2}{1/2} = 5\sqrt{2}.$$

### Sammanfattning Trigonometri

- ★ Trigonometri handlar om samband mellan **vinklar** och **längder**.
- ★ I en rätvinklig triangel gäller **Pythagoras sats**:  $a^2 + b^2 = c^2$ .
- ★ De trigonometriska funktionerna definieras som  $\sin(\theta) = \frac{\text{motstående}}{\text{hypotenusan}}$ ,  
 $\cos(\theta) = \frac{\text{närliggande}}{\text{hypotenusan}}$  och  $\tan(\theta) = \frac{\text{motstående}}{\text{närliggande}}$ .
- ★ Om man känner en vinkel och en sida kan man använda sin, cos och tan för att hitta andra storheter.
- ★ Om man känner ett sidförhållande och söker vinkeln använder man arcsin, arccos eller arctan.
- ★ I **enhetscirkeln** gäller  $P = (\cos v, \sin v)$ .
- ★ Därav följer också  $\tan(v) = \frac{\sin(v)}{\cos(v)}$  när  $\cos(v) \neq 0$ .
- ★ **Sinussatsen** gäller för alla trianglar:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ .
- ★ **Radianer** är ett naturligt vinkelmått. Sambandet med grader är  $360^\circ = 2\pi$  rad.
- ★ Trigonometri ger ett språk för att koppla ihop **vinklar**, **sidlängder**, **koordinater** och **geometriska samband**.

## 4 Exponentiella funktioner

### 4.1 Exponenter är iterativ multiplikation

Exponenter är ett kompakt sätt att skriva upprepad multiplikation. Till exempel:

$$x \cdot x = x^2, \quad x \cdot x \cdot x = x^3, \quad x \cdot x \cdot x \cdot x = x^4.$$

Allmänt betyder

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ faktorer}}$$

Här kallas  $x$  **bas** och  $n$  **exponent**.

Det är viktigt att det är **samma bas** som upprepas. Till exempel kan man inte skriva  $2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5$  som  $3^4$ .

Primtalsfaktorisering kan också skrivas med exponenter:

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7.$$

På samma sätt kan algebraiska uttryck skrivas mer kompakt:

$$x \cdot x \cdot y + 2 \cdot y \cdot y \cdot y \cdot x = x^2y + 2y^3x = xy(x + 2y^2).$$

### Formell definition

Om  $x$  är ett tal och  $n$  ett positivt heltal, definieras

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ faktorer}}.$$

Några viktiga specialfall är:

$$x^1 = x, \quad x^0 = 1 \quad \text{för } x \neq 0.$$

Man måste också vara försiktig med parenteser:

$$(-2)^2 = 4, \quad -2^2 = -(2^2) = -4.$$

Senare utvidgas exponentbegreppet till negativa och rationella exponenter.

## 4.2 Räkner regler och begrepp

För positiva heltal  $m, n$  gäller följande regler.

$$\begin{aligned} x^m \cdot x^n &= x^{m+n}, & \frac{x^m}{x^n} &= x^{m-n}, \quad x \neq 0, \\ (x^m)^n &= x^{mn}, & (xy)^n &= x^n y^n, \\ \left(\frac{x}{y}\right)^n &= \frac{x^n}{y^n}, \quad y \neq 0, & x^0 &= 1, \quad x \neq 0, \\ x^{-n} &= \frac{1}{x^n}, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

## 4.3 Rationella exponenter

Exponenter kan också vara bråk, till exempel  $x^{1/2}$  eller  $x^{2/3}$ . Då hänger de ihop med rötter.

Vi definierar

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

när uttrycket är definierat. Mer allmänt:

$$x^{m/n} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}.$$

Exempel:

$$8^{2/3} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4, \quad 16^{1/2} = \sqrt{16} = 4.$$

Man måste vara försiktig med jämna rötter. Till exempel är

$$\sqrt{x^2} = |x|,$$

inte alltid bara  $x$ . För udda rötter gäller däremot

$$\sqrt[3]{x^3} = x.$$

#### 4.4 Potensfunktioner och deras rötter

En **potensfunktion** har formen

$$f(x) = x^n,$$

där  $n$  är konstant. Exempel är

$$x^2, \quad x^3, \quad x^{-1}, \quad x^{1/2}.$$

Om man löser en ekvation av typen

$$x^n = a,$$

så söker man vilket tal som upphöjt till  $n$  blir  $a$ .

Om  $n$  är **jämnt**, till exempel 2 eller 4, får man ofta två lösningar:

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$

Mer allmänt:

★ om  $a > 0$ , finns två lösningar:  $x = \pm \sqrt[n]{a}$ ,

★ om  $a = 0$ , finns en lösning:  $x = 0$ ,

★ om  $a < 0$ , finns ingen reell lösning.

Om  $n$  är **udda**, till exempel 3 eller 5, finns alltid exakt en reell lösning:

$$x^3 = 8 \Rightarrow x = 2, \quad x^3 = -8 \Rightarrow x = -2.$$

Negativa exponenter ger funktioner som

$$x^{-1} = \frac{1}{x}, \quad x^{-2} = \frac{1}{x^2},$$

och de är inte definierade för  $x = 0$ .

##### Mini-exempel 4.1: Kvadratisk potens

Lös  $2x^2 + 3 = 21$ .

$$2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$

##### Mini-exempel 4.2: Fjärde potens

Lös  $x^4 = 81$ .

$$x = \pm 3.$$

##### Mini-exempel 4.3: Kvadratrot via bråkexponent

Lös  $x^{1/2} = 5$ .

$$\sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25.$$

##### Mini-exempel 4.4: Negativ exponent

Lös  $x^{-1} = 2$ .

$$\frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

#### 4.5 Exponentialfunktioner

En **exponentialfunktion** har formen

$$f(x) = C \cdot a^x,$$

där  $C$  och  $a$  är konstanter,  $a > 0$  och  $a \neq 1$ .

Här är basen fast och **variabeln sitter i exponenten**. Detta skiljer exponentialfunktioner från potensfunktioner.

**Vad betyder basen?**

Om

$$f(x) = C \cdot a^x,$$

så gäller

$$f(x+1) = C \cdot a^{x+1} = a \cdot f(x).$$

Det betyder att funktionsvärdet multipliceras med samma **faktor**  $a$  varje gång  $x$  ökar med 1.

**Tillväxt och avtagande**

Om  $a > 1$  får vi **exponentiell tillväxt**. Om  $0 < a < 1$  får vi **exponentiellt avtagande**.

Till exempel växer  $2^x$ , medan  $\left(\frac{1}{2}\right)^x$  avtar.

**Startvärde**

I funktionen  $f(x) = C \cdot a^x$  är

$$f(0) = C \cdot a^0 = C.$$

Alltså är  $C$  startvärdet.

**Exempel****Mini-exempel 4.5: En enkel exponentialfunktion**

Om  $f(x) = 3 \cdot 2^x$ , så är

$$f(0) = 3, \quad f(1) = 6, \quad f(2) = 12, \quad f(3) = 24.$$

Värdet dubblas för varje steg.

**Mini-exempel 4.6: Exponentiellt avtagande**

Om  $g(x) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$ , så är

$$g(0) = 100, \quad g(1) = 50, \quad g(2) = 25, \quad g(3) = 12.5.$$

**Mini-exempel 4.7: Tillväxt med procent**

Om en bakteriekultur börjar på 200 och ökar med 10% per timme:

$$N(t) = 200 \cdot 1.1^t.$$

**Mini-exempel 4.8: Minskning med procent**

Om ett ämne börjar på 50 gram och minskar med 20% per timme:

$$m(t) = 50 \cdot 0.8^t.$$

**Exempel 4.1: Bestäm parametrarna i en exponentialfunktion**

Anta att  $f(x) = Ca^x$  och att  $f(1) = 6$ ,  $f(3) = 24$ . Då får vi

$$\begin{aligned} Ca &= 6, & Ca^3 &= 24, \\ \frac{Ca^3}{Ca} &= \frac{24}{6} \Rightarrow a^2 &= 4. \end{aligned}$$

Eftersom  $a > 0$  får vi  $a = 2$ . Då blir

$$2C = 6 \Rightarrow C = 3.$$

Alltså:

$$f(x) = 3 \cdot 2^x.$$

## Sammanfattning exponentiella funktioner

- ★  $x^n$  betyder att samma bas multipliceras med sig själv  $n$  gånger.
- ★ Viktiga regler:

$$\begin{aligned}x^m x^n &= x^{m+n}, \\ \frac{x^m}{x^n} &= x^{m-n}, \\ (x^m)^n &= x^{mn}, \\ (xy)^n &= x^n y^n, \\ \left(\frac{x}{y}\right)^n &= \frac{x^n}{y^n}.\end{aligned}$$

- ★  $x^0 = 1$  för  $x \neq 0$ , och  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ .
- ★ Bråkexponenter hänger ihop med rötter:  $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ ,  $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$ .
- ★ Jämna exponenter kan ge två lösningar, medan udda exponenter ger en.
- ★ En **potensfunktion** har formen  $f(x) = x^n$ .
- ★ En **exponentialfunktion** har formen  $f(x) = C \cdot a^x$ .
- ★ Exponentialfunktioner beskriver förändring med samma **faktor** per steg:  $a > 1$  ger tillväxt och  $0 < a < 1$  ger avtagande.

## 5 Logaritmer

### 5.1 Logaritmer är inversen till exponentialfunktioner

Logaritmer hör ihop med exponentialfunktioner. Om

$$y = 2^x,$$

så kan man räkna fram att

$$2^1 = 2, \quad 2^2 = 4, \quad 2^3 = 8.$$

Men ibland vill man göra tvärtom: man känner värdet och vill veta **vilken exponent** som gav det. Frågan "Vilket tal måste 2 upphöjas till för att ge 8?" har svaret 3, eftersom

$$2^3 = 8.$$

Detta skrivs

$$\log_2(8) = 3.$$

Allmänt gäller:

$$a^x = b \iff \log_a(b) = x.$$

#### Formell definition

Om  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  och  $b > 0$ , så definieras

$$\log_a(b) = x \iff a^x = b.$$

Här är  $a$  **basen**,  $b$  **argumentet** och  $x$  logaritmens värde.

**Exempel**

$$\begin{array}{ll} \log_2(8) = 3 & \text{eftersom } 2^3 = 8, \\ \log_{10}(100) = 2 & \text{eftersom } 10^2 = 100, \\ \log_3(1) = 0 & \text{eftersom } 3^0 = 1, \\ \log_5\left(\frac{1}{5}\right) = -1 & \text{eftersom } 5^{-1} = \frac{1}{5}. \end{array}$$

**Varför är detta en invers?**

Logaritmen är inversen till exponentialfunktionen med samma bas. Därför gäller

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{och} \quad a^{\log_a(x)} = x.$$

**Viktiga villkor**

För att  $\log_a(b)$  ska vara definierad krävs:

- \*  $a > 0$ ,
- \*  $a \neq 1$ ,
- \*  $b > 0$ .

Till exempel är  $\log_2(-3)$  inte definierad.

**Skillnaden mot rötter**

Rötter används för att lösa uttryck av typen  $x^n = a$ . Logaritmer används för att lösa uttryck av typen  $a^x = b$ .

**Mini-exempel**

**Mini-exempel 5.1: Lös**  $2^x = 32$

$$32 = 2^5 \Rightarrow x = 5.$$

Alltså:

$$x = \log_2(32) = 5.$$

**Mini-exempel 5.2: Lös**  $10^x = 1000$

$$1000 = 10^3 \Rightarrow x = 3.$$

**Mini-exempel 5.3: Lös**  $3^x = \frac{1}{9}$

$$\frac{1}{9} = 3^{-2} \Rightarrow x = -2.$$

**5.2 Logaritmlagarna**

Logaritmlagarna följer direkt från definitionen.

**Produkten blir summa**

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y). \quad (1.9)$$

**Kvoten blir differens**

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y). \quad (1.10)$$

**Exponenten får flytta ner framför**

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x). \quad (1.11)$$

**Några viktiga specialfall**

$$\log_a(a) = 1, \quad \log_a(1) = 0,$$

samt

$$\log_a(a^x) = x, \quad a^{\log_a(x)} = x.$$

**5.3 Kort om baser**

Några baser är särskilt vanliga.

Basen 10 används ofta eftersom vårt vanliga talsystem bygger på tiopotenser. Då skriver man ofta

$$\lg(x) = \log_{10}(x).$$

I vissa sammanhang används bara  $\log(x)$ .<sup>15</sup>

Basen 2 är vanlig i datorsammanhang:

$$\log_2(x).$$

Man kan byta bas med **basbytesformeln**:

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}. \quad (1.12)$$

**5.4 Tillämpning av logaritmer**

Logaritmer används ofta när en storhet varierar över **många tiopotenser**. Då blir logaritmiska skalor praktiska.

Till exempel:

$$\lg(10) = 1, \quad \lg(100) = 2, \quad \lg(1000) = 3.$$

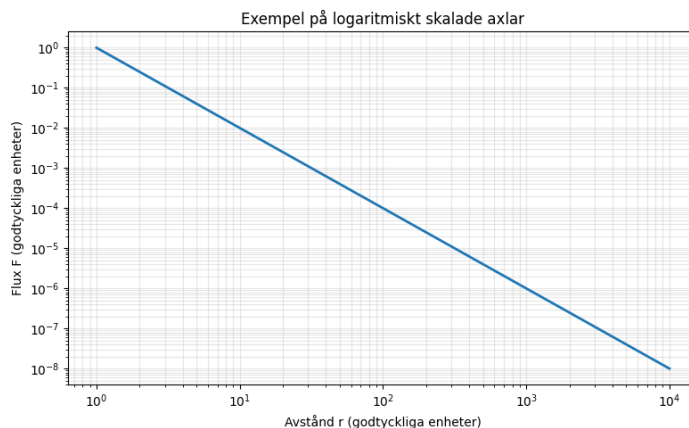
Varje steg uppåt motsvarar alltså en tiodubbling.

Om ett samband följer en potenslag, till exempel

$$F \propto \frac{1}{r^2},$$

så blir grafen en rät linje i ett log-log-diagram.

<sup>15</sup>Det är dock inte alltid en bra vana, eftersom olika områden ibland använder olika baser.



**Figur 1.19:** Exempel på logaritmiskt skalade axlar. Här visas ett samband av typen  $F \propto 1/r^2$ . På log-log-skala blir en potenslag en rät linje.

Ett klassiskt exempel från fysiken är **decibel**:

$$L = 10 \lg \left( \frac{I}{I_0} \right),$$

där  $I$  är intensiteten och  $I_0$  en referensintensitet.

Om intensiteten blir 10 gånger större ökar nivån med

$$10 \lg(10) = 10 \text{ dB.}$$

Om intensiteten blir 100 gånger större ökar nivån med

$$10 \lg(100) = 20 \text{ dB.}$$

### Sammanfattning Logaritmer

- ★ Logaritmer används när man vill ta reda på **vilken exponent** som ger ett visst värde:  $a^x = b \iff \log_a(b) = x$ .
- ★  $\log_a(b)$  är inversen till exponentialfunktionen med samma bas.
- ★ För att  $\log_a(b)$  ska vara definierad krävs  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ .
- ★ Viktiga specialfall är  $\log_a(a) = 1$  och  $\log_a(1) = 0$ .
- ★ Logaritmlagarna är:  $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ ,  $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ ,  $\log_a(x^r) = r \log_a(x)$ .
- ★ Vanliga baser är bas 10 och bas 2.
- ★ Med basbytesformeln kan man byta bas:  $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$ .
- ★ Logaritmer är särskilt användbara när storheter varierar över många tiopotenser.
- ★ På log-log-skala blir en potenslag, till exempel  $F \propto \frac{1}{r^2}$ , en rät linje.
- ★ Viktiga tillämpningar är bland annat **decibel** i fysik och **magnitudskalan** i astronomi.

## 6 Statistik

Inom astronomi och astrofysik måste man ofta hantera stora mängder **data**. Data kan till exempel vara mätvärden, bilder eller annan information. För att förstå datan behöver man kunna beskriva samband, jämföra storheter och analysera mätningar. I IOAA Senior är detta mycket viktigt, men även i IOAA Jr är det bra att känna till grunderna.

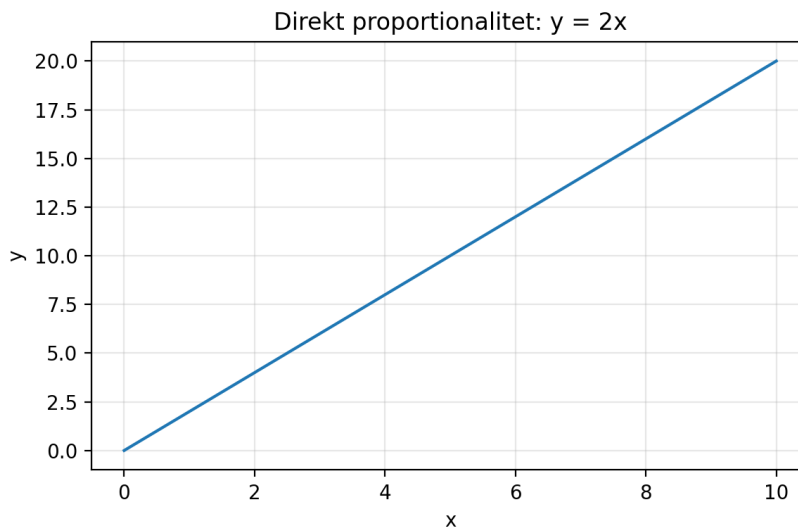
### 6.1 Proportionalitet

När man studerar data eller fysikaliska samband är det ofta viktigt att fråga: *hur ändras en storhet när en annan ändras?* Då kommer **proportionalitet** in.

Om två storheter är **direkt proportionella** kan man skriva

$$y \propto x \quad \text{eller} \quad y = kx,$$

där  $k$  är en konstant. Om  $x$  fördubblas, så fördubblas också  $y$ .

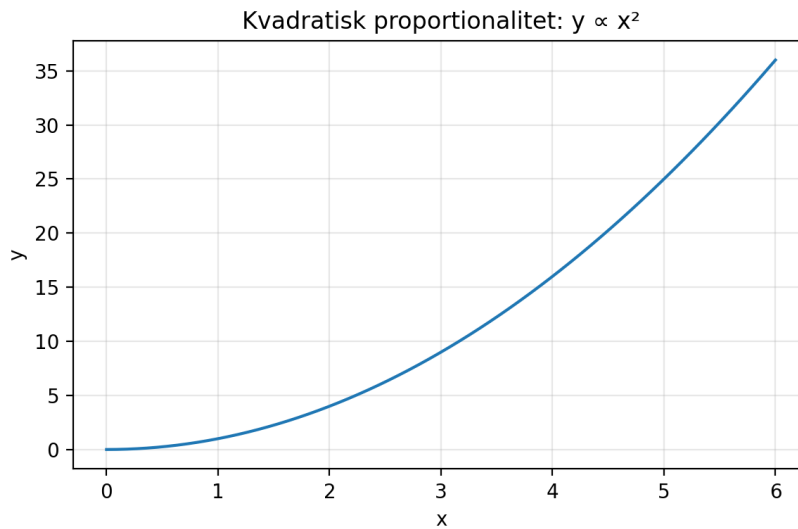


**Figur 1.20:** Exempel på direkt proportionalitet. När  $x$  fördubblas fördubblas också  $y$ .

I andra fall gäller

$$y \propto x^2.$$

Då säger man att  $y$  är **proportionell mot kvadraten** av  $x$ . Om  $x$  dubblas blir  $y$  fyra gånger så stor.

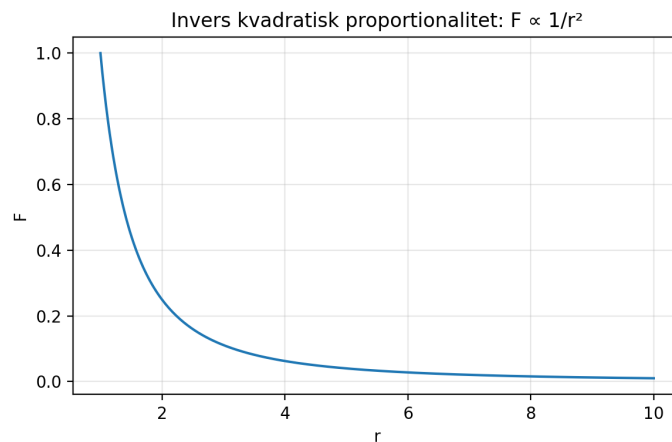


**Figur 1.21:** Exempel på kvadratisk proportionalitet. Här växer  $y$  snabbare än  $x$ .

Ett annat vanligt samband är

$$y \propto \frac{1}{x^2}.$$

Detta kallas **invers kvadratisk proportionalitet**. Gravitation och ljusflöde följer till exempel sådana samband.



**Figur 1.22:** Exempel på invers kvadratisk proportionalitet. Sambandet faller snabbt nära början och långsammare längre ut.

### Mini-exempel 6.1: Proportionalitet i en fysikfråga

Om gravitationskraften följer

$$F \propto \frac{1}{r^2},$$

och avståndet dubblas, så blir den nya kraften

$$F_{ny} = \frac{F_{\text{gammal}}}{2^2} = \frac{F_{\text{gammal}}}{4}.$$

### Mini-exempel 6.2: Kvadratisk proportionalitet

Om arean av en kvadrat följer

$$A \propto s^2,$$

och sidlängden blir tre gånger större, så blir arean

$$A_{ny} = 3^2 A_{\text{gammal}} = 9A_{\text{gammal}}.$$

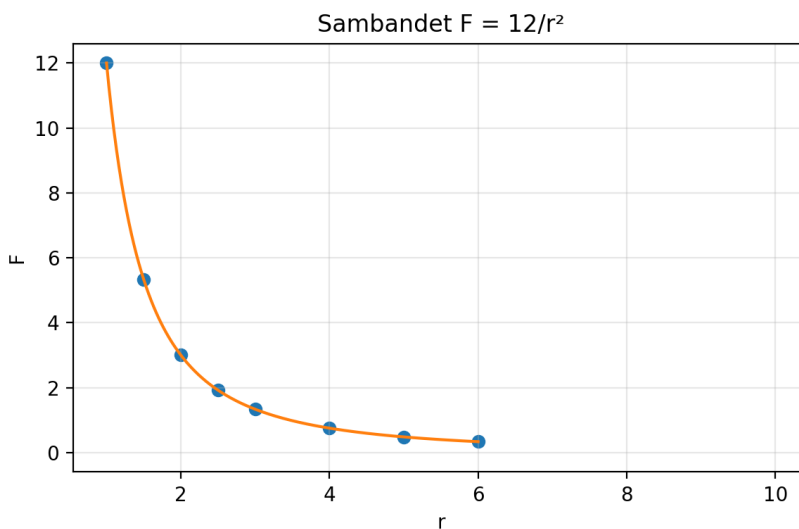
## 6.2 Linjärisering

Många samband ger inte rätta linjer när man ritar dem direkt. Men ibland kan man göra om problemet så att sambandet blir linjärt. Detta kallas **linjärisering**.

Anta till exempel att

$$F = \frac{12}{r^2}.$$

Om vi ritar  $F$  mot  $r$  får vi inte en rät linje.



**Figur 1.23:** Sambandet  $F = 12/r^2$  är inte linjärt när man ritar  $F$  mot  $r$ .

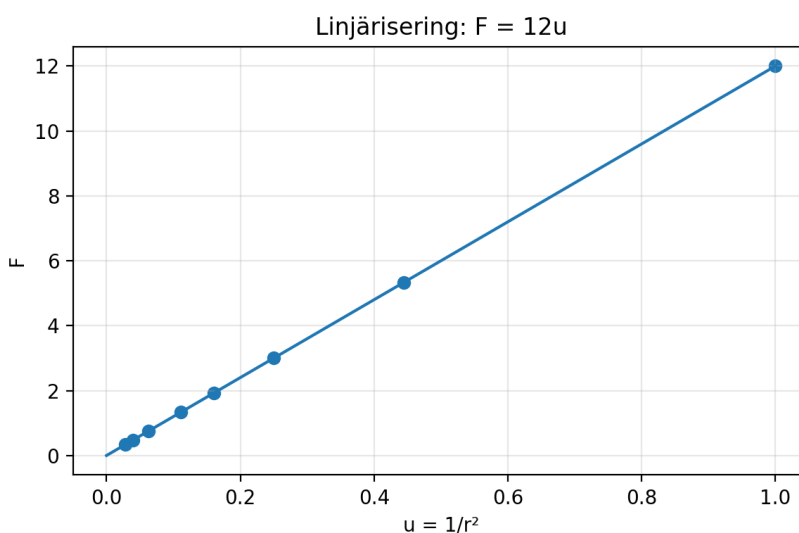
Men om vi inför den nya variabeln

$$u = \frac{1}{r^2},$$

så blir sambandet

$$F = 12u,$$

vilket är en rät linje.



**Figur 1.24:** När man i stället ritat  $F$  mot  $1/r^2$  blir sambandet linjärt.

Detta är idén med linjärisering: ett icke-linjärt samband kan ibland bli linjärt med en smart variablingsubstitution. Exempel:

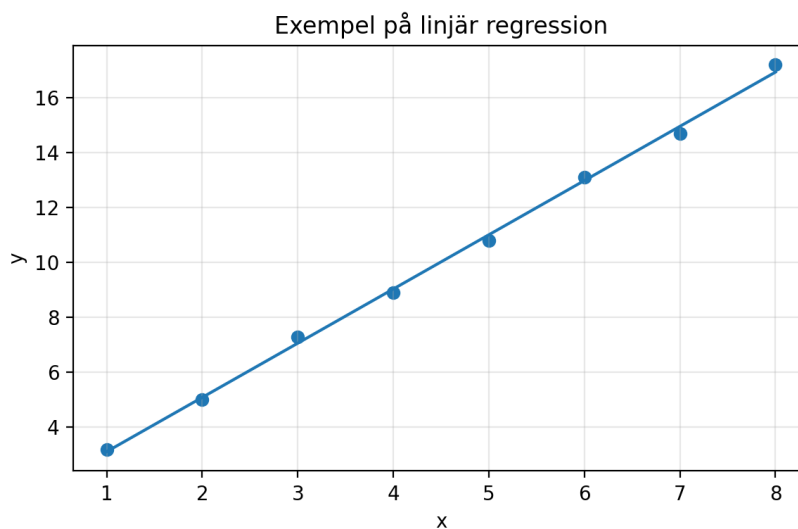
$$y \propto x^2 \Rightarrow y \text{ är linjär mot } x^2,$$

$$y \propto \frac{1}{x} \Rightarrow y \text{ är linjär mot } \frac{1}{x},$$

$$y \propto \frac{1}{x^2} \Rightarrow y \text{ är linjär mot } \frac{1}{x^2}.$$

### 6.3 Linjär regression

I riktiga mätningar ligger datapunkter nästan aldrig exakt på en perfekt linje. Därför vill man ofta hitta den räta linje som passar punkterna **bäst**. Detta kallas **linjär regression**.



**Figur 1.25:** Exempel på linjär regression. Punkterna är mätdata och linjen visar den bästa ungefärliga linjära modellen.

Linjär regression används ofta efter en linjärisering:

1. Gissa vilken proportionalitet som verkar rimlig.
2. Linjärisera sambandet om det behövs.
3. Anpassa en rät linje till datapunkterna.

### Exempel 6.1: Ritning på GeoGebra

Regression kan göras med digitala verktyg. Om du har en punktlista

$$l1 = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$$

kan du använda kommandot

```
RegressionLin(l1)
```

eller direkt

```
RegressionLin({(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)})
```

## 7 Uppgifter

1.1 Lös för  $x$ :

$$2x + y^2 - \frac{x}{2} = 8$$

1.2 Lös för  $x$ :

$$\frac{2x^3 - \frac{1}{x^2}}{2x^3} = 2y + 2 - \frac{y}{2}$$

1.3 Ge en lösning till ekvationen:

$$\frac{x^{-5} + x^{-6}}{x^{-5}} = 6$$

1.4 Bestäm om ekvationen har en lösning. Om ja, skriv svaret.

$$\frac{1}{27} - \frac{28}{7x^2} + 21 = 62$$

1.5 Lös uppgiften:

4 av 120 elever i en skola blev magsjuka. Omar the doctor hittade då 2 flaskor utspätt botemedel. Tyvärr visste Omar inte hur många ytterligare flaskor han behöver, men då frågade han professor Doniyor som svarade att om halva skolan blev sjuk så behöver han ytterligare 40 flaskor. Om varje flaska innehåller 25 ml av läkemedlet, hur många liter läkemedel kommer totalt att behövas?

1.6 År 2023 fanns det 210 elever i en skola, varav 2 av 10 elever fick godkänt i alla ämnen. 10 år senare på samma skola var det 7 av 10 elever som fick godkänt i alla ämnen.

- Om antal elever som fick godkänt fortfarande är samma, hur många elever förlorade skolan år 2033?
- Anta att antalet elever minskar med samma takt linjärt, det vill säga lika många elever per år. Hur lång tid kommer det att ta tills alla elever har lämnat skolan?
- År 2011 startade skolan. Hur många elever fanns i början när skolan startade?

1.7 Den resulterande kraften är  $F = mg$ , och att moment är  $M = F \cdot L$ . Givet att ett objekt väger 2 kg och att  $g = 9,82$  i en hävstång, hur långt behöver stängen vara för att momentet ska bli 8 Nm?

1.8 På Zikais bondegård finns det både kycklingar och får. Bonden har tyvärr dålig syn och kan inte se jättebra, men eftersom Zikai är kort så kan han ändå se hur många ben som finns i bondgården. Han vet att han ursprungligen köpte 67 djur. Sedan vet han att det finns 176 ben. Hur många kycklingar och hur många får finns det i bondgården?

1.9 Det finns en triangel  $ABC$  där sidorna är  $AB = c$ ,  $AC = b$  och  $BC = a$ .

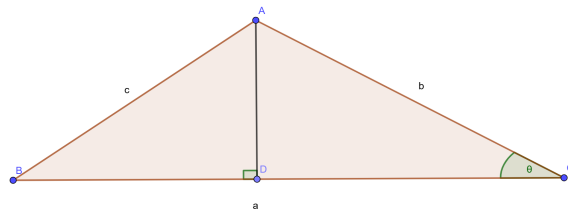
Sedan vet vi att punkt  $D$  skär sidan  $BC$  sådant att:

$$BD = c - 6, \quad DC = c + 6$$

och att sidan  $AD$  är vinkelrät mot  $BC$ . Vinkeln  $\theta$  bildas från vinkeln  $ACB$ .

Sidan  $c = 15$  cm.

- Räkna ut hur stor vinkeln  $\theta$  är, först i grader och sedan i radianer.
- Räkna fram arean av triangeln.



Figur 1.26: Figur till uppgift 9. Bilden är ej skal-enlig.

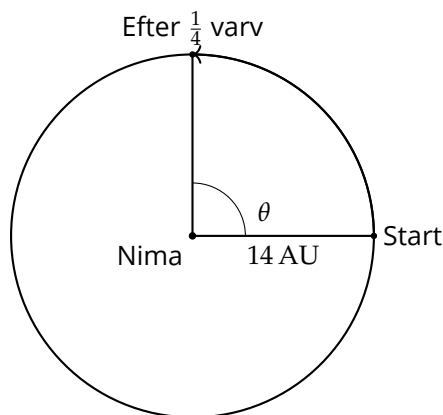
1.10 I ett nytt koloniområde får varje medlem 24 meter stängsel för att sätta upp runt sin egen odlingsyta.

De flesta tänker göra en rektangulär inhägnad, men Linn som tänker annorlunda funderar på om det finns en annan form som ger störst möjlig area med samma mängd stängsel.

- (a) Om varje bit stängsel är 8 meter lång, vad är den möjliga arean?
- (b) Om varje bit stängsel är 6 meter lång, vad blir den största möjliga arean?
- (c) Anta att allt stängsel kan delas i oändligt små bitar. Vilken form borde då Linn sätta upp för att få största möjliga area? Hur stor blir den i så fall?

**1.11** I solsystemet Nima finns det en planet som heter Anders. Om banan är helt cirkulär och banradien är 14 AU:

- (a) Vad blir banans omkrets?
- (b) Hur långt har planeten färdats efter ett kvarts varv?
- (c) Systemets stjärna heter förstås Nima. Om Anders har färdats 12 AU, hur stor förflyttning från originalvinkeln motsvarar det från Nimas perspektiv? Svara först i radianer och sedan i grader.



**Figur 1.27:** Cirkulär bana i uppgift 11.

**1.12** Viktor har byggt en miniatyrmodell av solsystemet. Givet att avståndet mellan Jorden och solen är 12 cm, vad blir:

- (a) Avståndet mellan Mars och solen, om Mars ligger 1,5 gånger så långt från solen jämfört med Jorden?
- (b) Avståndet mellan Jupiter och solen, om Jupiter ligger 5,2 gånger så långt från solen jämfört med Jorden?
- (c) Hur många gånger längre från solen ligger Jupiter än Mars i modellen?

- (d) Uranus ligger ungefär 19,2 gånger så långt från solen jämfört med Jorden. Vad är det största avståndet mellan Uranus och Jorden?

**1.13** Ljus färdas med cirka 300 000 km/s.

- (a) Hur långt färdas ljus på 3 sekunder?
- (b) Hur lång tid tar det för ljus att färdas 150 000 km?
- (c) En signal skickas från satelliten Mostafa till Jorden. Hur långt är det mellan Mostafa och Jorden om det tar 42 minuter för signalen att färdas?

**1.14** Om en stjärnas avstånd är omvänt proportionellt mot dess parallax gäller ungefär:

$$d = \frac{1}{p}$$

där  $d$  är avståndet och mäts i parsec, och  $p$  är parallaxen i bågsekunder.

- (a) Hur långt bort är en stjärna med parallaxen 0,5?
- (b) Hur långt bort är en stjärna med parallaxen 0,2?
- (c) Vad händer med avståndet om parallaxen halveras?

**1.15** Intensiteten för ljus följer proportionaliteten:

$$I \propto \frac{1}{r^2}$$

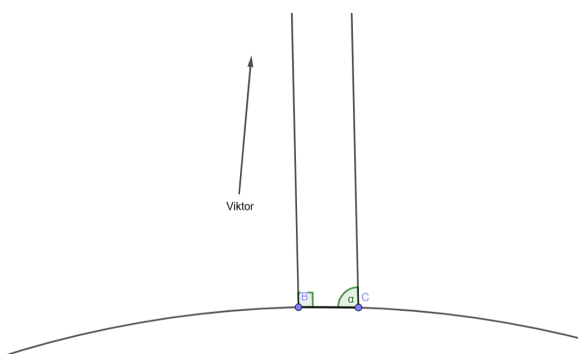
där  $r$  är radien och  $I$  är intensiteten.

- (a) Om avståndet fördubblas, hur många gånger mindre blir intensiteten?
- (b) Om avståndet tredubblas, hur många gånger mindre blir intensiteten?
- (c) En stjärna A ligger dubbelt så långt bort från Jorden som stjärna B. Hur förhåller sig intensiteten från A jämfört med B?
- (d) Om intensiteten ska bli 9 gånger större, hur måste avståndet ändras?

**1.16** Avståndet till asteroiden Viktor mäts på två platser på Jorden. Plats B mäter avståndet som 696969 km medan plats C mäter avståndet som 696968,989667 km.

Om vi förenklar situationen och säger att asteroiden och punkt B och C ligger i en rät triangel där asteroiden ligger precis ovanför B och bildas en rät vinkel.

- Vad är avståndet mellan B och C på Jorden ungefär?
- Beräkna vinkeln  $\alpha$  som C uppmäter från marken.
- Om Viktor ligger 1028210 km längre bort jämfört med B och fortfarande är precis ovanför B, vilket avstånd kommer C att mäta?



**Figur 1.28:** Figur till uppgift 15.

**1.17** Lös följande ekvationer med logaritmer och  $n$ :te roten ur. Svara med 2 decimaler.

- $2^x = 64$
- $10^x = 0,001$
- $\log_2(x) = 12,32$
- $3^{x+2} = 81$
- $10^{22x^2} = 2018$
- $27^{(\lg(23/x))^2} = 2$

**1.18** Magnitudskillnaden mellan två stjärnor ges av:

$$m_2 - m_1 = -2,5 \log \left( \frac{I_2}{I_1} \right)$$

där  $m$  är magnituden och  $I$  är intensiteten.

- Vad blir magnitudskillnaden om intensiteten hos stjärna 2 är 10 gånger så stor som intensiteten hos stjärna 1?

- Vad blir magnitudskillnaden om intensiteten hos stjärna 2 är 100 gånger så stor som intensiteten hos stjärna 1?

- Om magnitudskillnaden är 5, hur många gånger svagare är stjärna 2 jämfört med stjärna 1?

**1.19** Förenkla med hjälp av logaritmlagarna:

- Dela upp uttrycket i flera termer:  
 $\log_a(x^3y^2)$
- $\log_a\left(\frac{5x}{y}\right)$
- $\log_a(x^{0,25})$
- Skriv som en enda logaritm:

$$2 \log(x) + \log(y) - \log(z)$$

- $\log(x) + \log(y) - 2 \log(z)$

**1.20** En bakteriekultur växer enligt modellen:

$$N(t) = 200 \cdot 1,5^t$$

där  $t$  mäts i timmar.

- Hur många bakterier finns efter 1 timme?
- Hur många finns efter 3 timmar?
- Hur många gånger större har populationen blivit efter 4 timmar?
- Förklara med ord vad talen 200 och 1,5 betyder i modellen.

**1.21** En radioaktiv substans avtar enligt modellen:

$$m(t) = 80 \cdot 0,75^t$$

där  $m$  mäts i gram och  $t$  i timmar.

- Hur mycket finns kvar efter 1 timme?
- Hur mycket finns kvar efter 2 timmar?
- Hur många procent minskar massan med per timme?

**1.22** Punkten  $P$  ligger på enhetscirkeln.

- Om  $P = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , vad är vinkeln  $v$  i grader?
- Om  $P = (0, -1)$ , vad är vinkeln  $v$  i grader?

- (c) Om vinkeln är  $180^\circ - v$ , vilket samband gäller då för sinus?  
(d) Om vinkeln är  $-v$ , vilket samband gäller då för cosinus?

**1.23** Använd sinussatsen.

I en triangel  $ABC$  gäller att

$$A = 30^\circ, \quad B = 45^\circ, \quad a = 6$$

- (a) Beräkna sidan  $b$ .  
(b) Bestäm vinkeln  $C$ .  
(c) Beräkna sidan  $c$ .

**1.24** En fysikalisk storhet  $F$  följer sambandet:

$$F = \frac{20}{r^2}$$

- (a) Är  $F$  linjär mot  $r$ ?

- (b) Vilken ny variabel kan införas för att göra sambandet linjärt?  
(c) Skriv om formeln med den nya variabeln.  
(d) Vad blir lutningen i den linjäriserade grafen?

**1.25** Utför regression av datasetet nedan.

En elev mäter följande värden:

$$x : 1, 2, 3, 4$$

$$y : 3, 5, 7, 9$$

- (a) Verkar sambandet vara linjärt?  
(b) Bestäm en formel på formen  $y = kx + m$  som passar bra till punkterna.  
(c) Vad betyder lutningen  $k$  i tabellen?  
(d) Vad betyder startvärdet  $m$ ?

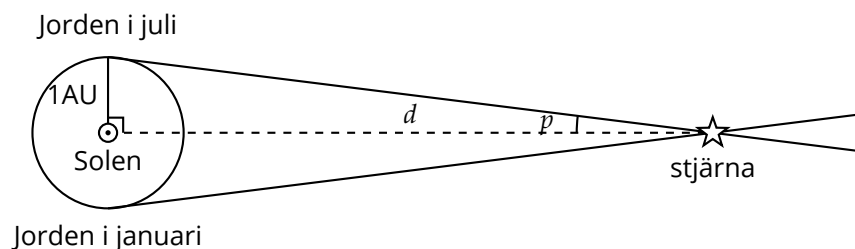
# Kapitel 2

# Astronomi

## 1 Stjärnors rörelse

Vi upplever stjärnorna på himmelssfären som stillastående, med en konstant position, men i själva verket rör sig stjärnor hela tiden, av många olika anledningar. Dessa rörelser är alltid mycket små på grund av det enorma avståndet, därav krävs specialiserade teleskop för att observera dem. Stjärnors rörelse på himlen har i huvudsak två komponenter: egenrörelse och parallax. Egenrörelsen kommer från stjärnans egen hastighet genom rymden medan parallaxen beror på observationer från olika perspektiv.

### 1.1 Parallax



**Figur 2.1:** Hur parallaxeffekten kommer från perspektivförändringar mot stjärnorna.

När jorden rör sig i sin omloppsbana kring solen kommer vår position relativt en stillastående stjärna att ändras något. Om den observerade stjärnan är en närliggande sådan kommer vinkeln från vilken vi observerar den, att förändras relativt stjärnor i bakgrunden. Detta på grund av att observatörens ståndpunkt förändras till följd av jordens rörelse kring solen. För oss kommer det se ut som att stjärnan rör sig på himlen med en period på ett år. Den vinkeln som stjärnan maximalt rör sig är dubbelt så stor som den så kallade parallaxvinkeln -  $p$ . Med trigonometri kan vi beräkna hur stort avståndet är till stjärnan som en funktion av parallaxen enligt

$$d = \frac{1\text{AU}}{\tan p} \quad (2.1)$$

där 1 AU är medelavståndet mellan jorden och solen. Om vi antar att  $p$  är mycket litet kan vi förenkla bort tangens i uttrycket. Utöver detta kan vi definiera en ny enhet så att den multiplikativa

konstanten 1 AU försvinner. Denna nya enhet kallas parsec och definieras som avståndet till en stjärna med parallaxen en bågsekund ( $1^\circ/3600$ ). Detta ger

$$d = \frac{1}{p}. \quad (2.2)$$

där  $d$  mäts i parsec ( $1 \text{ Pc} \approx 3,26 \text{ ly}$ ), och  $p$  mäts i bågsekunder.

## 1.2 Egenrörelse

En stjärnas egenrörelse är dess förändring i position på stjärnhimlen, orsakad av stjärnans egen hastighet genom rymden. Notera att denna hastighet mäts relativt till solsystemet och jordens hastighet genom rymden. Egenrörelsen mäts i bågsekunder per år ( $''/\text{yr}$ ). För mycket avlägsna stjärnor är dess egenrörelse inte märkbar.

En stjärnas egenrörelse utgörs av dess **tangentiella** hastighet, det vill säga rörelse tvärs över synlinjen. Ett enkelt samband mellan stjärnans egenrörelse och tangentiella hastighet ges av

$$v_t = 4.74\mu d \quad (2.3)$$

där  $v_t$  är den tangentiella hastigheten mätt i km/s,  $\mu$  stjärnans egenrörelse i  $''/\text{yr}$ , och  $d$  avståndet till stjärnan i parsec. Konstanten 4.74 är endast en omvandlingsfaktor för att få rätt enheter.

Stjärnor har även en **radiell** hastighet,  $v_r$ , vilken utgörs av dess rörelse bort från eller mot observatören. Denna ger alltså inte upphov till någon förändring i stjärnans position på himmelsfären. Den radiella hastigheten kan beräknas med hjälp av dopplereffekten, se avsnitt 5. Stjärnans totala hastighet genom rymden,  $v_{tot}$ , består alltså av den radiella och tangentiella komponenten, dessa är vinkelräta mot varandra, vilket ger följande samband med hjälp av Pythagoras sats

$$v_{tot} = \sqrt{v_t^2 + v_r^2} \quad (2.4)$$

## 2 Flux och magnituder

Ljus är energi i form av vågor som rör sig i vakuum. Genom att studera ljuset som kommer från en stjärna kan vi ta reda på många av stjärnans egenskaper. Vid fusionsprocesser som sker i alla stjärnors inre emitteras energi i form av elektromagnetisk strålning, och en del av denna uppfattas som synligt ljus.

Inom fysiken definierar vi effekt som energi per tid men inom astronomin kallar vi den totala effekten hos en stjärna för **luminositet**,  $L$ . Luminositeten mäts, liksom effekt, i enheten Watt (W),  $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$ . Den intensitet av stjärnans ljus som en observatör på avstånd  $d$  från stjärnan uppfattar kallas **flux**. Eftersom stjärnans ljus är lika starkt i alla riktningar kan flux beskrivas som luminositetens effekt jämnt spridd över en sfär med arean  $4\pi d^2$  enligt

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} \quad (2.5)$$

Ett annat sätt att beskriva flux som är väldigt vanligt inom astronomin är **magnituder**,  $m$ . Detta är en logaritmisk skala från det antika Grekland. Oftast beskriver man skalan endast när man jämför två magnituder. Då ser den ut såhär:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \lg \frac{F_1}{F_2}. \quad (2.6)$$

Alltså kommer en stjärna som lyser 10 gånger *starkare* (högre intensitet) att ha en apparent magnitud som är 2,5 *lägre*, notera: inte gånger. Magnitud 0 definierar man till stjärnan Vega. Då magnitudskalan används genom att jämföra magnituder och flux mellan stjärnor kan det ibland vara bra att kunna apparent magnitud och flux för någon enstaka stjärna utantill, förslagsvis solen eller Vega.

Man skiljer på **apparent** och **absolut** magnitud, där den apparenta magnituden är stjärnans *uppfattade* ljusstyrka, det vill säga ett annat sätt att mäta flux. Absolut magnitud definieras som en stjärnas apparenta magnitud på ett avstånd av 10 parsec. Om vi vill jämföra luminositeten av stjärnor kan vi använda oss av absolut magnitud,  $M$ . Om vi sätter in (2.5) i (2.6) och sätter avståndet till 10 pc får vi

$$m - M = 5 \lg \frac{d}{10 \text{pc}} \quad (2.7)$$

där  $d$  är det verkliga avståndet till stjärnan. Denna ekvation kallas för **avståndsmodulen**. Värt att notera är att absoluta magnituder också kan skrivas som en kvot mellan luminositeter, på samma sätt som tidigare:

$$M_1 - M_2 = -2,5 \lg \frac{L_1}{L_2}. \quad (2.8)$$

## 2.1 Bolometrisk korrektion

Ofta anges magnituder enbart i det optiska spektrumet, alltså synligt ljus, och all annan flux-/luminositet bortkastas. När man bedriver astrofysik vill man dock ofta veta den totala luminositeten/magnituden av en stjärna och behöver därför korrigera för bortfallet. Detta kallas för **bolometrisk korrektion**. Korrektionen,  $BC$ , görs i magnituder och ser därav ut som

$$M_{Bol.} = M_V + BC \quad (2.9)$$

där  $M_{Bol.}$  är den bolometriska (totala) magnituden och  $M_V$  är magnituden i det synliga filtret. Eftersom magnituder är definierade utifrån stjärnan Vega kommer stjärnor som liknar Vega i temperatur ha en bolometrisk korrektion nära 0 medan stjärnor som antingen är mycket kalla eller mycket varma kommer ha stora korrektioner. Bolometriska korrektionsfaktorn kan beräknas teoretiskt utifrån planckkurvan men i praktiken används alltid tabeller för att korrigera magnituder.

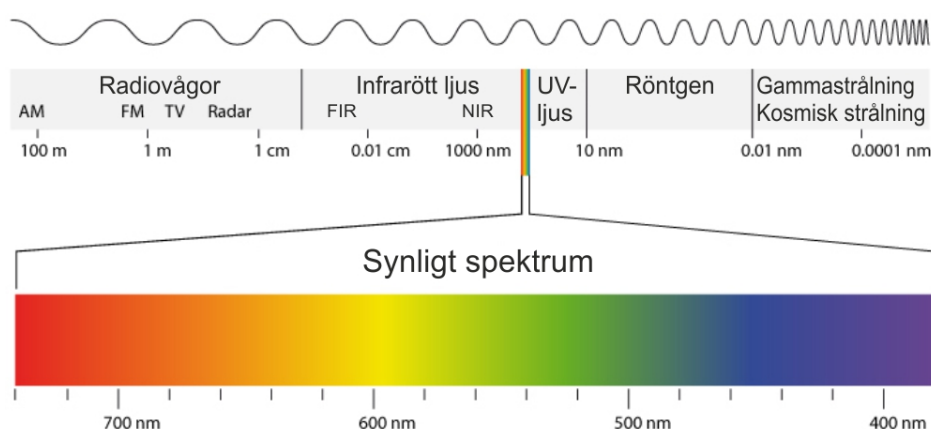
## 3 Svartkroppsstrålning

### 3.1 Ljus

Ljus är energi som kan beskrivas av vågrörelser eller partiklar som kallas fotoner. Det är för det mesta enklast att prata om ljus i form av vågor inom astronomin. Ljusets energi kan beskrivas genom dess våglängd  $\lambda$  eller frekvens  $f$ . Våglängden mäts i meter, men då denna ofta är mycket liten används ofta nanometer,  $1 \text{nm} = 10^{-9} \text{m}$ , eller Ångström,  $1 \text{Å} = 10^{-10} \text{m}$ . Frekvensen mäts i Hertz,  $1 \text{Hz} = 1 \text{s}^{-1}$ . Ljusets hastighet i vakuum,  $c$ , är alltid  $299,792,458 \text{m/s}$ , oavsett observatör. Ett enkelt samband mellan våglängden och frekvensen skrivs

$$f\lambda = c \quad (2.10)$$

En högre frekvens innebär en kortare våglängd och en högre energi. Det elektromagnetiska spektrumet går från radiovågor kring  $10^3 \text{m}$  till gammavågor i storleksordningen  $10^{-14} \text{m}$ . Endast en bråkdel av det elektromagnetiska spektrumet ligger inom synligt ljus.



**Figur 2.2:** Det elektromagnetiska spektrumet

Mer allmänt, för alla typer av vågrörelser, gäller

$$f\lambda = v \quad (2.11)$$

där  $v$  är vågens hastighet.

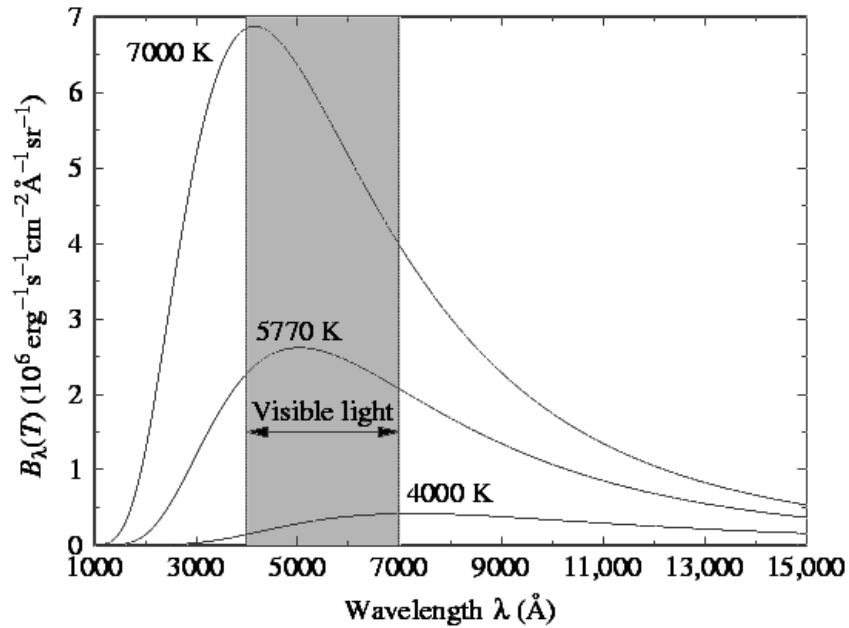
### 3.2 Svartkroppar

Alla kroppar med en temperatur över 0 K emitterar elektromagnetisk strålning. Många stjärnor och en del andra himlakroppar kan approximeras till svartkroppar. En svartkropp är ett idealiserat objekt som absorberar all infallande strålning och sänder ut strålning över ett kontinuerligt spektrum vars intensitet och form endast beror av objektets temperatur.

Spektrumet av en stjärna kan vara den viktigaste datapunkten av de tre när det kommer till dess analys. Genom spektrallinjer kan vi hitta stjärnans kemiska innehåll, genom spektrumets form kan vi hitta temperaturen -  $T$  - och genom dess förskjutning kan vi hitta dess radiella hastighet. Stjärnor i huvuddelen av sina liv kan ses som perfekta svartkroppar. Detta innebär att stjärnans spektrum kan beskrivas av en planckkurva, vars form ges av Plancks strålningslag som ser ut som följande

$$B(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \quad (2.12)$$

där  $h$  är Plancks konstant,  $c$  är ljusets hastighet,  $\lambda$  är våglängden av ljuset,  $k_B$  är Boltzmanns konstant och  $T$  är den absoluta yttemperaturen av stjärnan. Det är inte nödvändigt att kunna använda denna formel i sig, men det kan vara bra att ha sett den då man kan härleda flera mycket användbara samband från den.



**Figur 2.3:** Planckkurvor för några objekt av olika temperatur

Genom att derivera Plancks strålningslag och finna derivatans nollpunkt får vi Wiens förskjutningslag. Den beskriver ett enkelt samband mellan stjärnans yttre temperatur  $T$  och den våglängd där stjärnan strålar som mest  $\lambda_{max}$ :

$$\lambda_{max} \cdot T = 2.898 \text{ mm K} \quad (2.13)$$

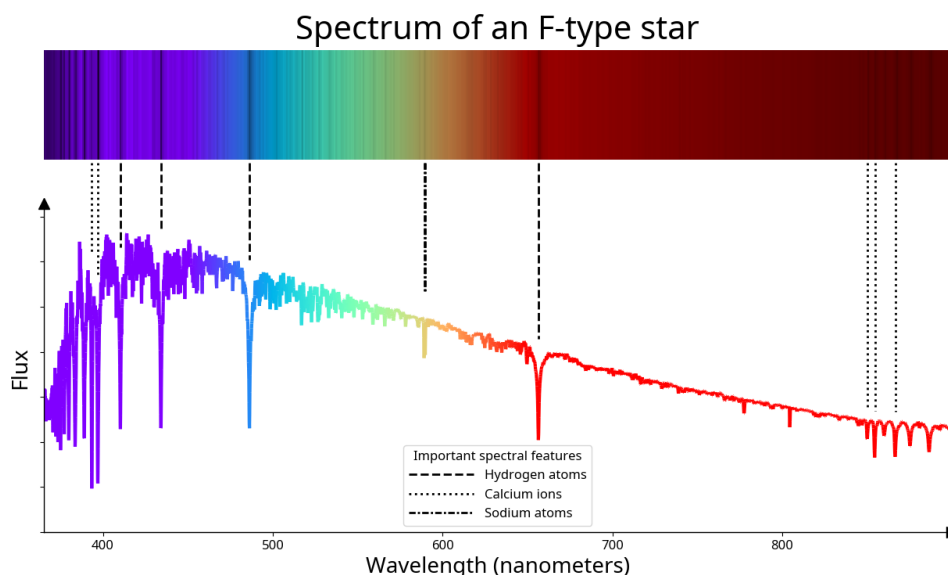
Genom att istället integrera över alla våglängder och vinklar får vi Stefan-Boltzmanns strålningslag.

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4 \quad (2.14)$$

där  $R$  är radien av stjärnan och  $\sigma$  är Stefan-Boltzmanns konstant. På detta vis kan vi finna radien eller luminositeten av en stjärna, givet dess temperatur eller strålningsmaxima, eller vice versa. Då härledningen av dessa två formler involverar derivering och integraler är det ej nödvändigt att förstå själva härledningen. Man bör dock vara bekväm med att använda Wiens förskjutningslag samt Stefan-Boltzmanns strålningslag.

## 4 Spektrallinjer

Stjärnspektrum följer inte Plancks strålningslag perfekt och är därav inte perfekta svartkroppar (även om de ofta kan approximeras vara det). Dessa imperfektioner orsakas av att grundämnen i stjärnornas atmosfärer absorberar fotoner av vissa specifika våglängder. Detta ger upphov till spektrallinjer, vilket ger svarta linjer i ett annars kontinuerligt spektra, eller hack i en Planckkurva. Djupet av dessa linjer/hack kan ge oss information om den kemiska sammansättningen av stjärnan. I praktiken består alla stjärnor till 75% av väte, 24% helium och resterande tyngre ämnen som vi kallar metaller. Halten metaller kallas metallicitet.



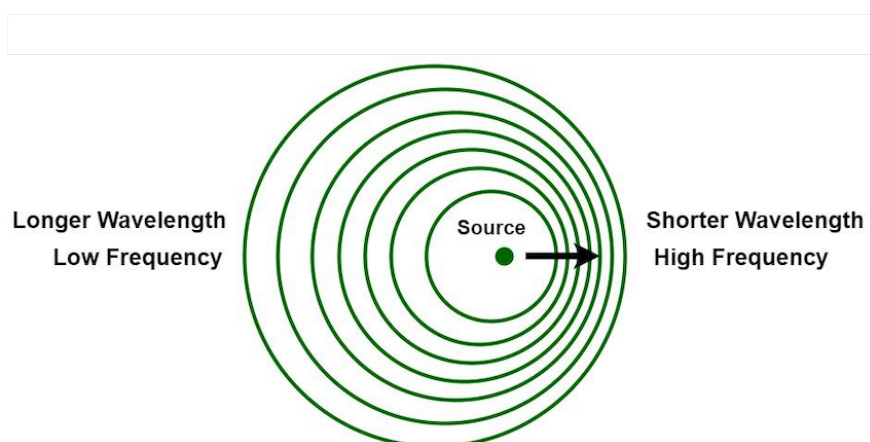
**Figur 2.4:** Spektrumet av en typisk stjärna av typ F. [6]

Spektrallinjernas bredd och position kan även beräknas experimentellt och genom att jämföra dessa med uppmätta värden är det möjligt att beräkna andra fenomen och störningar hos stjärnan samt dess relativa hastighet.

## 5 Dopplereffekten

Dopplereffekten är ett fenomen som påverkar alla föremål som är i rörelse och sänder ut någon typ av vågrörelse. Dessa kan vara ljusvågor, ljudvågor, eller vågor i vatten eller annat medium, helt enkelt alla vågrörelser som har en våglängd och en frekvens. Inom astronomin är det dock endast relevant att diskutera dopplereffekten för ljus.

Då det finns en relativ hastighet mellan observatören och ljuskällan kommer den observerade våglängden av ljuset att förskjutas. Om ljuskällan rör sig bort från dig sänder den samtidigt ut ljusvågor i alla riktningar, vilket gör att vågorna som rör sig i motsatt riktning jämfört med ljuskällan kommer få en längre våglängd än vad de sändes ut med. Alltså kommer du uppfatta att ljuset som når dig har en *längre* våglängd samt *lägre* frekvens, än vad det från början sändes ut med. Man säger att ljuset rödförskjuts, eftersom att ljus inom synliga våglängder blir rödare. Det motsatta sker om ljuskällan rör sig mot observatören, då blåförskjuts ljuset eftersom våglängderna blir kortare.



Figur 2.5: Dopplereffekten

## 5.1 Radialhastighet

Genom att beräkna hur mycket spektrallinjer för en viss stjärna förskjuts jämfört med teoretiska värden, kan vi beräkna hur mycket ljuset förskjutits, och därmed stjärnans radiella hastighet. För hastigheter  $v \ll c$  gäller följande

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c} = z \quad (2.15)$$

där  $\lambda$  är den observerade våglängden,  $\lambda_0$  den så kallade vilovåglängden, det vill säga det teoretiska värdet för den specifika spektrallinjen.  $z$  är rödförskjutningstalet, vilket är ett värde för hur mycket ljuset förskjuts. Om  $z$  är positivt innebär det att ljuskällan rör sig bort från oss, och vice versa. Vid mycket höga hastigheter, som blir i jämförbar storleksordning med ljusets (runt  $v > 0.1c$ ), bör relativistiska effekter tas i åtanke enligt

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} \quad (2.16)$$

Det finns många sätt att skriva ovanstående samband, det går även att uttrycka med den utsända frekvensen  $f_e$  och den mottagna frekvensen  $f_r$

$$\frac{f_r}{f_e} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} = z + 1 \quad (2.17)$$

I de flesta fall räcker det dock att använda formeln för icke-relativistisk dopplereffekt.

## Viktiga formler

$$d = \frac{1}{p}$$

$$m_1 - m_2 = -2.5 \lg \frac{F_1}{F_2}$$

$$m - M = 5 \lg \frac{d}{10 \text{ pc}}$$

$$f\lambda = c$$

$$\lambda_{\text{max}} T = 2.898 \text{ mm K}$$

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$$

$$z \approx \frac{v}{c} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

## 6 Uppgifter

Uppgifter markerade med \* är något överkurs och kräver vissa koncept som introduceras längre fram i kompendiet.

- 2.1** (a) Hur många bågsekunder är  $0,5^\circ$ ?  
 (b) Förklara med hjälp av en figur begreppet parallax.  
 (c) Vad står  $r$  och  $p$  för i formeln  $r = 1/p$  och vilka är enheterna?  
 (d) Beräkna avståndet i parsec till stjärnan Ross 614 som har en årlig parallax av  $0,25''$ .  
 (e) Räkna om det till ljusår.
- 2.2** Proxima Centauri är den stjärna som befinner sig närmast solsystemet. Den har en årlig parallax av  $0,76''$ , uppvisar en egenrörelse på  $3,85''/\text{år}$  och en radialhastighet på  $16 \text{ km/s}$ .
- (a) Hur långt bort befinner den sig?  
 (b) Hur stor är Proxima Centauris tangentialhastighet?  
 (c) Hur stor är Proxima Centauris totala hastighet i förhållande till solen?
- 2.3** Över loppet av ett år verkar en stjärna flytta sig  $0,38''$  över natthimlen och sen tillbaka igen. Hur långt bort är stjärnan?
- 2.4** (a) Förklara förhållandet mellan flux, luminositet och absolut magnitud.
- (b) Förklara skillnaden mellan absolut och apparent magnitud.
- 2.5** Hur stort flux ger stjärnan Vega som har en apparent magnitud på  $0,00$ ?
- 2.6** (a) Vilken av stjärnorna Betelgeuse ( $\alpha$  Ori) och Rigel ( $\beta$  Ori) är starkast på himlen?  
 (b) Hur stor är skillnaden i magnitud?  
 (c) Beräkna hur stort förhållandet är mellan stjärnornas flux.
- 2.7** (AOjr-final 2023) Solinstrålningen vid jorden är cirka  $1360 \text{ W/m}^2$ . Vad hade solinstrålningen varit om jorden befunnit sig dubbelt så långt från solen? Svara i  $\text{W/m}^2$ .
- 2.8**  $\zeta 1$  Lyr och  $\zeta 2$  Lyr är två stjärnor som befinner sig väldigt nära varandra och som inte kan uppfattas som två skilda stjärnor utan teleskop. Deras enskilda magnituder är  $4,30$  respektive  $5,70$ . Vilken magnitud skulle en människa se dem tillsammans?
- 2.9** En stjärna har en bolometrisk korrektion på  $-0,19$ . Vad är kvoten av ljusstyrkan mellan den strålning som stjärnan sänder ut i det synliga spektrumet jämfört mot hela spektrumet?

- 2.10** Vilovåglängderna för Balmerseriens linjer är linje våglängd  
 $H\alpha$  656,272 nm  
 $H\beta$  486,133 nm  
 $H\gamma$  434,047 nm  
 $H\delta$  410,174 nm  
 Vid en spektralmätning av en stjärna mätte man upp våglängden för  $H\beta$  till 486,157 nm.
- (a) Hur stor är stjärnans radiella hastighet i förhållande till jorden i mätningen?
- (b) Var rörelsen riktad mot eller från oss?
- 2.11** Den lägsta magnituden en människa kan se vid perfekta tillstånd är runt 6.5. Det finns ungefär 9100 stjärnor som är mer ljusstarka än 6.5 magnituder. Om alla dessa skulle vara fördelade jämt på himlen, vad skulle medelvinkeln mellan två närliggande stjärnor vara?
- 2.12 Donis observation** (AOjr-final 2025) En lördag kväll är Doni ute och stjärnskådar när han märker en speciell stjärna. Doni har otroligt bra syn och ser att den är 0,0006" stor på natthimlen. Genom några beräkningar fick vi reda på att avståndet till stjärnan är 3,6 parsec. Bestäm dess verkliga diameter.
- 2.13** Anta att en typ 1a-supernova med absolut magnitud  $M = -19,5$  skulle uppstå på avståndet 9 kpc. Beräkna vilken apparent magnitud supernovan skulle få.
- 2.14** Betrakta en modell av stjärnan Dschubba ( $\delta$  Sco), den centrala stjärnan i huvudet av konstellationen Skorpionen. Antag att Dschubba är en sfäriska svartkropp med en yttemperatur på 28,000 K och en radie på  $5.16 \times 10^9$  m. Låt denna modellstjärnan vara 123 pc från jorden. Bestäm följande för stjärnan: luminositeten, absoluta bolometriska magnituden, apparenta bolometriska magnituden, avståndsmodulem, fluxet mätt vid stjärnans yta, fluxet mätt från jorden och den maximala våglängden  $\lambda_{\max}$ .
- 2.15** Andromedagalaxen har en magnitud på 3.44. Detta borde betyda att om vi kan se stjärnor ned till 6.5 magnituder att vi relativt lätt borde kunna se Andromedagalaxen väldigt tydligt under normala nätter. Detta är dock inte fallet (pröva själv om du kan se andromedagalaxen med dina ögon, jämför också hur en stjärna med samma magnitud ser ut). Förklara varför Andromedagalaxen är mycket svårare att se än en stjärna med samma magnitud. Är det rimligt att använda en absolut magnitud från 10 pc när man talar om galaxer och stora objekt?
- 2.16** (AOjr final 2025) Cepheidvariabler är stjärnor vars luminositeter varierar med tid. En specifik Cepheidvariabel observeras öka sin temperatur från med 30% och öka sin luminositet med en faktor 5. Hur förändras dess radie?
- 2.17 Rymdsignaler** (AOjr-final 2024) Ett av de frekvensband som används för ESAs nya satellitnavigationssystem GALILEO är 1575 MHz. Vad är våglängden av detta ljus? Är det mer eller mindre energirik än synligt ljus?
- 2.18** Avståndet till klotformiga stjärnhopar kan oftast bestämmas med hjälp av RR Lyrae-variabler, vilka har den absoluta magnituden 0.6 i medeltal. I stjärnhopen M3 finns det en mängd sådana. De har apparenta magnituder i medel 15,6. Beräkna avståndet till M3.
- 2.19** En stjärnas yta ökar med radien i kvadrat. Vilken stjärna har större luminositet?
- (a) En med flux  $10^{14} \text{ W/m}^2$  vid stjärnans yta och lika stor radie som solen eller en med flux  $10^{13} \text{ W/m}^2$  vid stjärnans yta och dubbelt så stor radie som solen?
- (b) En med yttemperaturen 6000 K och lika stor radie som solen eller en med temp 5000 K och dubbelt så stor radie?
- 2.20 Kosmiska avstånd** (AOjr-final 2024) Supernovor av typ 1a uppstår när vita dvärgar samlar på sig massa tills de överskrider Chandrasekhargränsen på 1,44 solmassor. Eftersom supernovorna alltid inträffar vid samma massa kommer

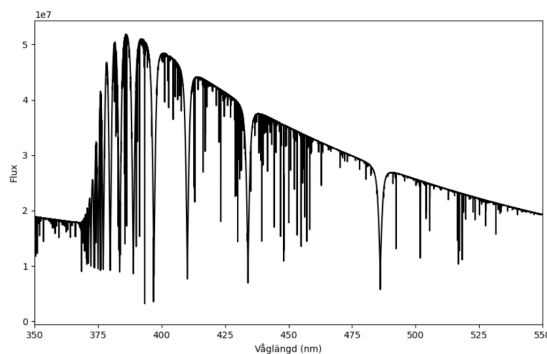
de alltid ha samma absoluta magnitud:  $-21,5$ . Vi observerar en sådan supernova med den apparenta magnituden  $+7,5$  i M101 (Pinwheel Galaxy). Hur långt borta är M101?

**2.21** Milles kör bil. Han gillar inte att stanna vid rödligt. Hur snabbt måste Milles köra för att få rödligt ( $625 \text{ nm}$ ) att se grönt ut ( $505 \text{ nm}$ ) för honom? Om allt är relativt, kan han argumentera för varför han inte borde få böter?

**2.22** (IOAAjr23) Barnards stjärna har en parallax på  $0,552$  bågsekunder, och dess egenrörelse är  $= 10,31$  bågsekunder/år. Från dess spektrum såg en observatör att absorptionslinjen syns vid  $656,044 \text{ nm}$  istället för vid  $656,281 \text{ nm}$ . Vad är den sammanlagda hastigheten av Barnards stjärna relativt observatören?

**2.23 Vår största granne** (AOjr-final 2024) Andromeda är  $3$  grader i diameter på stjärnhimlen och har den apparenta magnituden  $3,44$ . Astronomer har beräknat den absoluta magnituden till  $-21,0$ . Vilken diameter har Andromeda i kpc?

**2.24 Mostafas favoritstjärna** (AOjr-final 2025) Mostafa har med ett teleskop tagit fram ett spektrum av sin favoritstjärna. Den finns i figur 2.6. Uppskatta temperaturen, luminositeten och radien av denna stjärna. Stjärnan befinner sig på huvudserien, endast en värdesiffror krävs.



**Figur 2.6:** Spektrumet för en stjärna, genererat med POLLUX.

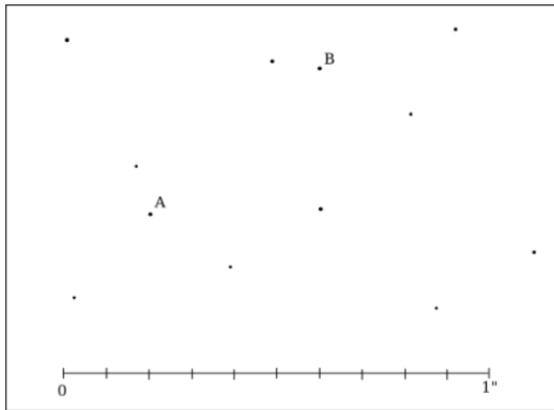
**2.25 Alien planet** (AOjr-final 2024) En huvudseriestjärna har fått sin maximala utstrålade våglängd mätt till  $190 \text{ nm}$ . Uppskatta på vilket avstånd till stjärnan du hade behövt befinna dig för att uppleva samma ljusstyrka som vi upplever från solen på jorden. Svara i astronomiska enheter.

**2.26** (AO-final 2021) På vilken punkt i rymden mellan solen och Sirius lyser dessa himlakroppar lika starkt? Sirius magnitud är  $-1,4$  och avståndet mellan Sirius och solen är  $2,637 \text{ pc}$ .

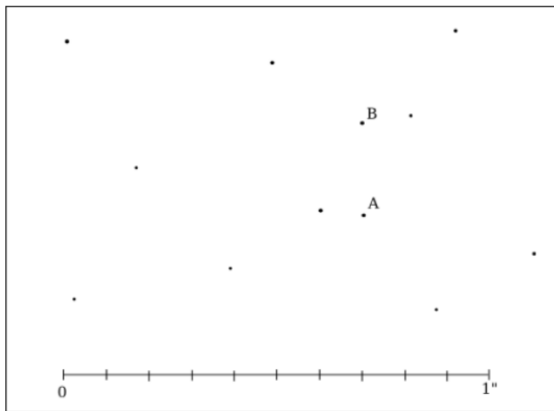
**2.27** (IOAAjr23, (endast delar av uppgiften)) Sirius är den ljusstarkaste stjärnan på natt-himlen under vintern på norra halvklotet och sommaren på södra. Den har apparent magnituden  $m_v = -1,47 \text{ mag}$ . Sirius B är den binära kompanjonen till Sirius A och dess magnitud är  $m_v = 8,5 \text{ mag}$ . Deras omloppstid är  $50$  år och parallaxen för systemet är  $350$  millibågsekunder, medan deras separation är  $7$  bågsekunder. Du kan anta att Sirius A har yttemperaturen  $T = 10,000 \text{ K}$ . Temperaturen hos Sirius B uppskattas till  $25,000 \text{ K}$ . Båda stjärnorna har bolometrisk korrektionen  $-0,4$ . En absolut bolometrisk magnitud som är lika med noll motsvarar luminositeten  $3 \times 10^{28} \text{ W}$ . Banan antas vara cirkulär och synlinjen är i rät vinkel mot banplanet hos systemet.

(a) Beräkna luminositeten och radien hos Sirius A och B.

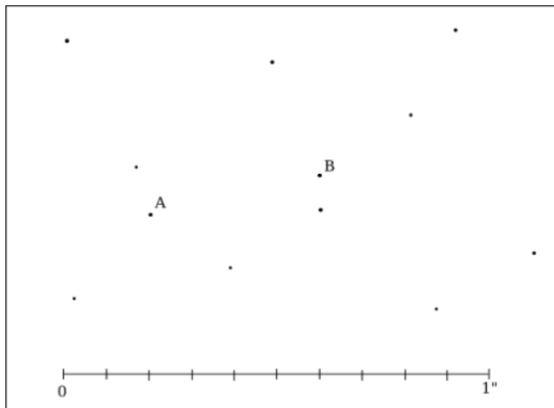
(b) Vilken är separationen i banan hos systemet i meter?



(a) 2007-01-01



(b) 2007-07-01



(c) 2008-01-01

**Figur 2.7:** Tre bilder tagna vid tidpunkter då parallaxen är som störst för stjärna A.

**2.28** I figur 2.7 visas tre bilder på en liten del av stjärnhimlen enligt skalan i figuren. Skalan är i vinkelmått längs en storcirkel över himlavalvet. De är tagna med ett halv års

mellanrum så att parallaxen för stjärna A är maximal mellan 2.7a och 2.7b.

- Hur långt är det till stjärna A?
- Hur långt är det till stjärna B?
- Hur stor är stjärna Bs egenrörelse?
- Hur stor är stjärna Bs tangentialhastighet?

**2.29 \* Lätt att skina när man är omgiven av stjärnor** (Final 2024) Herkuleshoppen, M13, är en klotformig globulär stjärnhop (kluster) i stjärnbilden Herkules. M13 är 6800 pc från oss och har en skenbar storlek på 20 bågminuter (i diameter) vilket motsvarar en radie på 19,8 pc, dessutom är magnituden av M13 5,8.

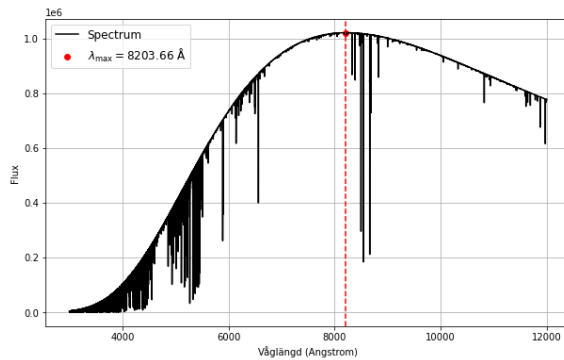
- Om vi uppskattar att alla stjärnor i M13 liknar vår sol (vilket inte är ett korrekt antagande), hur mycket massa finns då i M13?
- Uppskatta medelavståndet mellan två närliggande stjärnor i stjärnhopen.

**2.30** (IOAAjr24) Interstellärt stoft värms upp av het joniserande strålning från unga blå stjärnor. De återemitterar sedan UV-ljuset. Ett stoftmoln i en stofrik galax har nyligen studerats av en forskare. Gör den förenklade approximationen att du kan behandla stoftmolnet som en svartkropp. Hjälp honom att besvara följande frågor:

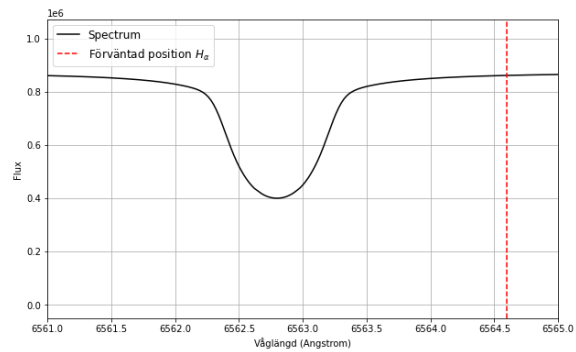
- Hitta den våglängd där stoftets emission toppar ( $\lambda_{max}$ ) om det har en temperatur på  $T = 50K$ .
- Forskaren fastställer att stoftet har en total luminositet av  $L_{dust} = 1,6 \times 10^{11} L_{\odot}$ . Uppskatta storleken på stoftmolnet genom att anta att stoftet är sfäriskt fördelat.
- \* Uppskatta stoftmolnets vinkelstorlek  $\theta$  om den kosmologiska rödförskjutningen för galaxen,  $z$  är 0,01. (Ledtråd: här behövs hubbles lag, kommer längre fram i kompendiet)

**2.31 \* Stjärnan Nova Stella.** Följande data har samlats från den avlägsna stjärnan Nova Stella med teleskop på jorden. Stjärnans apparenta magnitud är +9,9

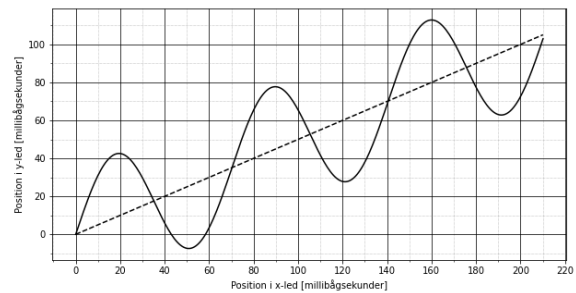
- Bestäm avståndet till stjärnan från Jorden.
- Bestäm stjärnans luminositet i solluminositeter
- Bestäm stjärnans temperatur samt vilken typ av stjärna den är utifrån ett HR-diagram.
- Bestäm stjärnans massa och radie i solmassor och solradier.
- Bestäm stjärnans totala hastighet, inkludera både vinkelhastigheten (tangentiell) över himlen och radiell hastighet.



**Figur 2.8:** Spektrumet av Nova Stella. Datan har genererats via POLLUX.



**Figur 2.9:** Inzoomad plot av  $H_{\alpha}$  linjen i Nova Stella.



**Figur 2.10:** Utveckling av Nova Stellas position över 3 år. Förväntad parallaxriktning är i y.

# Kapitel 3

## Koordinatsystem

### 1 Geografiska koordinatsystemet

För att kunna beskriva var något befinner sig på jorden behöver vi ett koordinatsystem. Precis som på ett vanligt koordinatplan kan vi ange en position med två tal, men eftersom jorden är sfärisk måste koordinaterna anpassas till en krökt yta.

#### Latitud

**Latitud** anger hur långt norr eller söder om ekvatorn en plats ligger.

Ekvatorn definieras som den stora cirkel som ligger mitt emellan nordpolen och sydpolen. Den delar jorden i två halvklot.

Latitud mäts i grader:  $0^\circ$  vid ekvatorn,  $+90^\circ$  vid nordpolen,  $-90^\circ$  vid sydpolen.

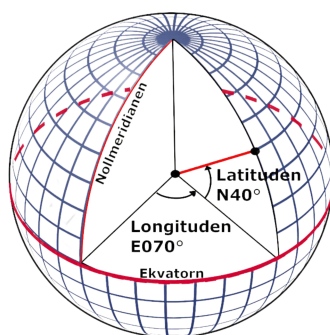
#### Longitud

**Longitud** anger hur långt öster eller väster om en vald nollpunkt en plats ligger.

Till skillnad från latitud finns det ingen naturlig nollpunkt för longitud. Man har därför definierat en referenslinje: **nollmeridianen**, som går genom Greenwich i Storbritannien.

Longitud mäts i grader:  $0^\circ$  vid Greenwich, upp till  $+180^\circ$  österut, upp till  $-180^\circ$  västerut.

Longitudlinjer kallas **meridianer**. Alla meridianer är **storcirklar** som går genom både nordpolen och sydpolen.



**Figur 3.1:** Longitud och latitud. Källa: <https://lifeofstardust.com/forarintyg/>

## Hur koordinaterna fungerar tillsammans

En punkt på jordens yta bestäms alltså av två vinklar:

$$(\phi, \lambda) \quad \text{där } \phi = \text{latitud och } \lambda = \text{longitud.}$$

- \* Latitudcirklar (förutom ekvatorn) är **småcirklar**.
- \* Meridianer är **storcirklar**.
- \* Ekvatorn är också en **storcirkel**.

Detta kommer bli tydligare senare när vi övergår till **sfärisk geometri**, delkapitel 3.

## 2 Tid

I astronomi måste man vara noga med vad man menar med ett *dygn*. Jorden roterar runt sin axel, men den rör sig också samtidigt runt solen. Därför finns det två naturliga sätt att definiera ett dygn, beroende på *vilken referens* man jämför med.

### Soldygn (synodiskt dygn)

Ett **soldygn** (kallas också **synodiskt dygn**) är tiden mellan två tillfällen då solen står som högst på himlen (kulminerar), t.ex. från en lokal middag till nästa. Detta är det dygn vi använder i vardagen och det är **definerat** som:

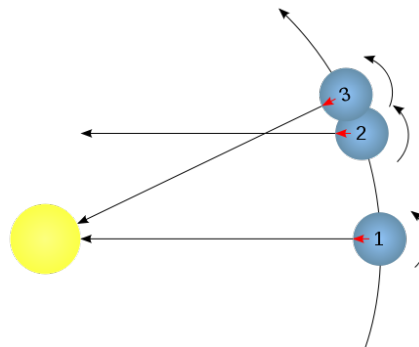
$$T_{\text{sol}} = 24 \text{ h.}$$

### Sideriskt dygn

Ett **sideriskt dygn** är tiden det tar för stjärnhimlen att återvända till samma läge, dvs. tiden mellan två passager av en avlägsen stjärna över samma meridian. Det sideriska dygnet är ungefär:

$$T_{\text{sid}} \approx 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s.}$$

**Varför blir det inte 24 h?** Under ett dygn hinner jorden inte bara rotera, utan också flytta sig en liten bit i sin bana runt solen. När jorden har roterat ett helt varv relativt stjärnorna pekar samma meridian mot samma stjärnor igen, men solen ligger då *inte* exakt på samma plats, eftersom jorden har förflyttat sig längs banan. För att solen ska stå på samma plats igen måste jorden rotera *lite extra*. (Därför blir soldygnen lite längre än det sideriska dygnet.)



**Figur 3.2:** Skillnaden mellan sideriskt och synodiskt dygn. Källa: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sidereal\\_day\\_%28prograde%29.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sidereal_day_%28prograde%29.svg)

Soldygn (24 h)	Sideriskt dygn
Handlar om solen (solhöjd, solkulmination, soltid, skuggor)	Handlar om stjärnornas läge på himlen
Du följer solens rörelse dag till dag	Du arbetar med rektascension (RA) och lokal stjärntid

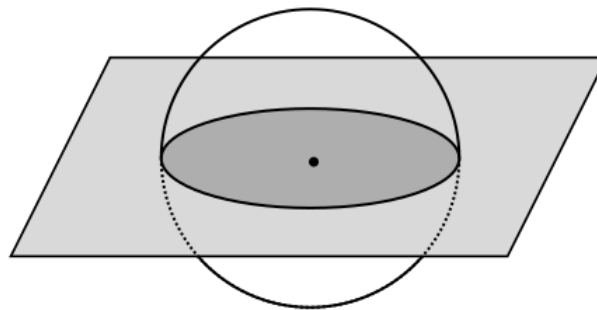
**Tumregel:** Solen som referens  $\Rightarrow$  soldygn. Stjärnorna som referens  $\Rightarrow$  sideriskt dygn.

### 3 Sfärisk trigonometri

Himmeln är en sfär, alltså måste vi lära oss hur vi beräknar avstånd och vinklar på en sfär för att få en bättre förståelse för observationer och koordinatsystem.

#### 3.1 Storcirklar

En **storcirkel** är skärningen mellan en sfär och ett plan som går genom sfärens centrum. Stora cirklar är de största möjliga cirklar som kan ritas på en sfär, och de delar sfären i två lika halvor. På Jorden är ekvatorn och longitudlinjerna exempel på storcirklar. Alla storcirklar har samma radie som själva sfären.



**Figur 3.3:** Storcirklar är skärningen av ett plan genom klotets mitt.

I sfärisk geometri mäts alla vinklar mellan storcirklar som visas i Figur 3.4a. (Tänk: vinkeln mellan två plan genom sfärens centrum.)

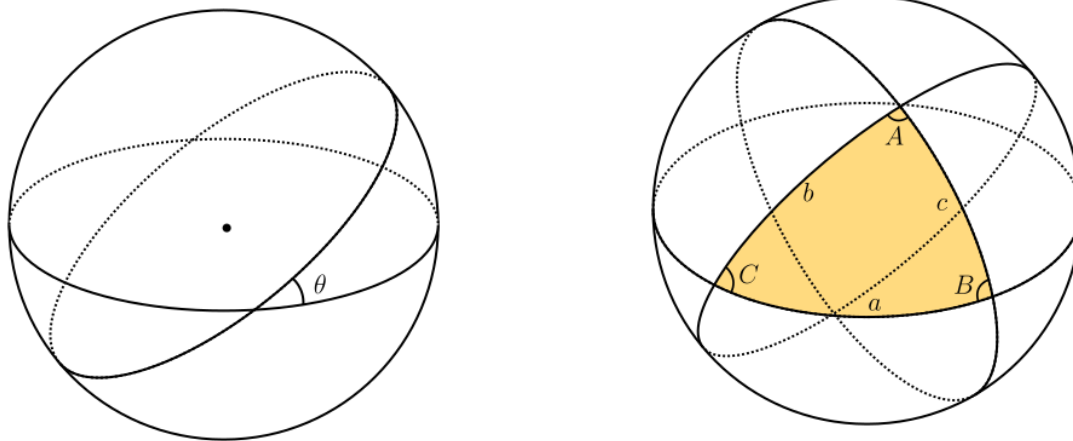
#### 3.2 Varför mäts sidorna i vinklar?

Betrakta den sfäriska triangeln som visas i **Figur 3.4b**. Till skillnad från en plan triangel är sidorna i en sfärisk triangel inte räta linjer, utan **bågar av stora cirklar**. En storcirkel är en cirkel på sfären vars centrum sammanfaller med sfärens centrum (t.ex. ekvatorn eller en meridian på jorden). Längden av dessa kan mätas på två sätt:

- \* som en verklig längd på ytan (t.ex. i kilometer),
- \* eller som den **centrala vinkel** som bågen spärrar upp vid sfärens centrum.

Om radien är  $R$  och båglängden är  $s$  gäller sambandet

$$s = R\theta,$$



(a) Vinkeln mellan två storacirklar.

(b) En sfärisk triangel.

**Figur 3.4:** Två demonstrerande sfärer.

där  $\theta$  är vinkeln i radianer. Genom att arbeta direkt med  $\theta$  slipper vi bära med oss radien i formler. (Det gör att samma formler funkar för alla sfärer, oavsett storlek.)

Det är därför sidorna  $a$ ,  $b$  och  $c$  i en sfärisk triangel anges i **vinkelmått** (grader eller radianer) snarare än i längdenheter.

### 3.3 Sinus- och cosinusformler för sfäriska trianglar

På ytan av en sfär bildas en sfärisk triangel av tre bågar av stora cirklar. Den **sfäriska cosinuslagen** och den **sfäriska sinuslagen** relaterar vinklar och sidor i dessa sfäriska trianglar.

För en sfärisk triangel med sidorna  $a$ ,  $b$  och  $c$ , och vinklarna  $A$ ,  $B$  och  $C$  mot dessa sidor, är formlerna som följer:

#### Sfärisk cosinuslag

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (3.1)$$

#### Sfärisk sinuslag

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \quad (3.2)$$

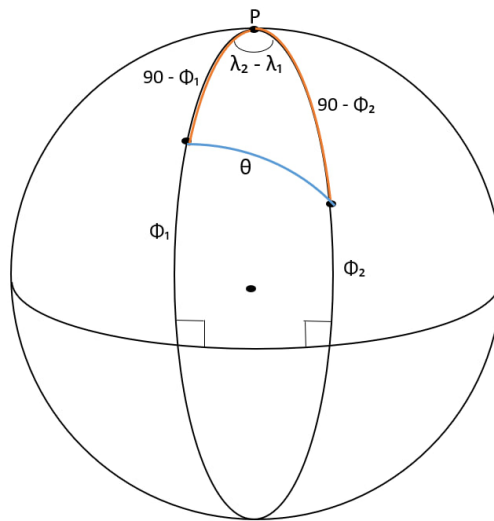
Dessa formler gör att vi kan beräkna vinklar eller sidor i en sfärisk triangel när vi känner till de andra kvantiteterna.

**Viktig Not: Vi behöver bara tre komponenter av en sfärisk triangel för att kunna hitta de andra komponenterna.** (Det viktiga är att de tre du har räcker för att lösa triangeln.)

### 3.4 Exempel: Hitta avståndet mellan två städer på Jorden

Låt oss tillämpa sfärisk geometri för att hitta avståndet mellan två städer på Jorden. För att göra detta behöver vi latituden och longituden för varje stad.

Att representera latituden från ekvatorn är enkelt eftersom det är en båge av en storcirkel. I **Figur 3.5** visas två städer på Jorden. Det vinkelmässiga avståndet mellan städerna och ekvatorn är latituden, betecknad  $\Phi$ . Därför är det vinkelmässiga avståndet mellan städerna och Nordpolen  $90^\circ - \Phi$ . Dessutom är skillnaden i longituderna  $\lambda$  viktig för att bestämma avståndet mellan två punkter på Jorden. Denna longitudskillnad mäts som en vinkel vid Nordpolen (punkt P), som visas i figuren.



**Figur 3.5:** Representation av två städer på Jorden

Det vinkelmässiga avståndet mellan två städer, betecknat  $\theta$ , kan bestämmas genom att tillämpa cosinuslagen på den sfäriska triangel som bildas av städerna. Utifrån den sfäriska cosinuslagen för triangeln får vi

$$\cos \theta = \cos(90^\circ - \phi_1) \cos(90^\circ - \phi_2) + \sin(90^\circ - \phi_1) \sin(90^\circ - \phi_2) \cos(\Delta\lambda).$$

**Snabb påminnelse:** Kom ihåg identiteterna

$$\cos(90^\circ - x) = \sin x \quad \text{och} \quad \sin(90^\circ - x) = \cos x.$$

Den används när man byter mellan komplementvinklar.

Den slutliga ekvationen vi behöver är alltså

$$\cos \theta = \sin \phi_1 \sin \phi_2 + \cos \phi_1 \cos \phi_2 \cos(\Delta\lambda). \quad (3.3)$$

Det är denna formel som används i praktiska beräkningar för att bestämma storcirkelsavståndet mellan två punkter med kända latituder och longituder.

För att konvertera detta vinkelmässiga avstånd till ett fysiskt avstånd (t.ex. kilometer), multiplicera den centrala vinkeln  $\theta$ , uttryckt i radianer, med jordens radie. Formeln för det fysiska avståndet  $d$  blir då

$$d = R \times \theta,$$

där  $R$  är jordens radie (6378 km).

## 4 Himmelsfären

Inom astronomi föreställer man sig ofta himlen som en enorm sfär som omger Jorden, känd som **himmelsfären**. Punkter på himmelsfären motsvarar stjärnor, planeter och andra objekt. Denna modell hjälper oss att visualisera himmelska koordinater och navigera natthimlen.

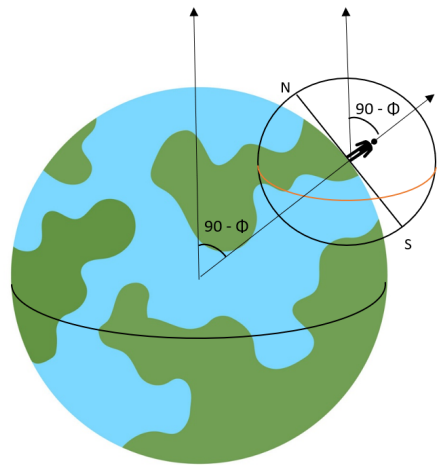
Betrakta en person som står någonstans på Jorden, som avbildas i Figur 3.6. Vi benämner jordens nordpol som  $P$ , och antar att nordpolen är en riktning i rymden, representerad av en vektor.

Dessutom uppfattar vår person en **horisont**, avbildad som en linje som inkluderar de norra (N) och södra (S) punkterna som riktningar mot norr och söder på Jorden. Men dessa riktningar skiljer sig från riktningen mot den nordliga polen ( $P$ ) på himlen, eftersom de är från observatörens perspektiv.

Om vi betraktar en parallell riktning till  $P$  från observatören kan vi definiera punkten  $P$  på den himmelska sfären för observatören. **Observera att på den himmelska sfären spelar endast riktningarna roll.** Sfärens radie påverkar inte definitionen, och det antas normalt vara oändligt. För representations skull kommer vi att betrakta en liten radie här.

Nu, betrakta jordens ekvator. Om vi tar en parallell storcirkel (representerad med orange färg) på himmelsfären, kan vi definiera **himmelsekvatorn**. Vinkeln mellan riktningen mot jordens nordpol och observatören är  $90^\circ - \text{latituden } (\Phi)$  för observatören. Som visas i figuren definierar detta en motsvarande vinkel på himmelsfären.

Riktningen som pekar uppåt på himlen för observatören är betecknad som  $z$  (**zenit**).



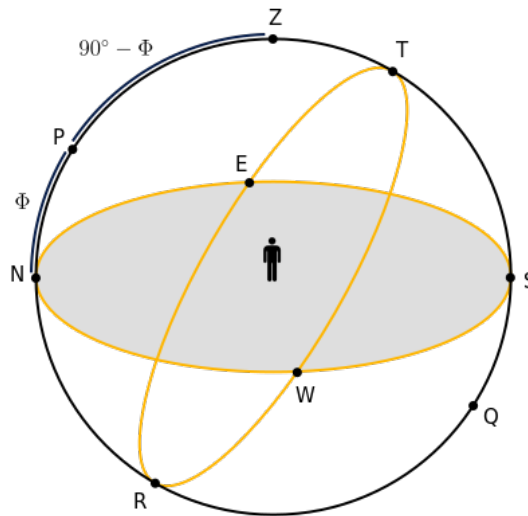
**Figur 3.6:** <https://www.vectorstock.com/royalty-free-vector/planet-color-icon-earth-symbol-world-sign-vector-45684759>

Nu tar vi bort Jorden och betraktar endast den himmelska sfären, roterar den så att observatören står vertikalt och  $z$  pekar uppåt. Detta ger oss bilden i Figur 3.7.

I denna vy visas himmelsekvatorn och punkterna N, S, P och  $z$ . Det finns ytterligare punkter som används för att beskriva himlen. De första och enklaste är Öst (E) och Väst (W) punkterna, belägna på horisonten. De är vid skärningen mellan himmelsekvatorn och horisontcirkeln.

Vi har också punkten Q, som är belägen i motsatt riktning mot punkt P. Slutligen definierar vi punkterna R och T som de nedre och övre punkterna på himmelsekvatorn. Latitudvinkeln är

också representerad i bilden.



**Figur 3.7:** Viktiga punkter på himmelsfären.

Nedan finner du formella och mer precisa definitioner av dessa punkter:

- ★ **N** — riktningen mot norr på horisonten, enligt en kompass.
- ★ **S** — riktningen mot söder på horisonten, enligt en kompass.
- ★ **P (Norra himmelspolen)**: Punkten på himmelsfären rakt ovanför jordens nordpol. Den är rotationscentrum för stjärnhimlen på norra halvklotet och ligger mycket nära Polaris (Polstjärnan). Den är i praktiken fixerad på himlen. **Tumregel:**  $h_P = \phi$  där  $h_P$  är norra himmelspolens höjd över horisonten och  $\phi$  är observatörens latitud (på norra halvklotet).
- ★ **Q (Södra himmelspolen)**: Detta är punkten direkt ovanför jordens sydpol på himmelsfären. Den ligger mittemot norra himmelspolen. Södra himmelspolen är inte synlig från norra halvklotet men kan ses från södra halvklotet.
- ★ **Z (Zenit)**: Zenit är punkten på himlen som ligger rakt ovanför observatören. Den representerar den "högstapunkten på himmelsfären sett från en observatörs perspektiv. Höjden av zenit över horisonten är alltid  $90^\circ$  för varje observatör.
- ★ **Ekvator (Himmelsekvatorn)**: Himmelsekvatorn är projektionen av jordens ekvator på himmelsfären. Den delar himmelsfären i norra och södra halvklotet, precis som jordens ekvator delar planeten i en nordlig och en sydlig halva. Himmelsekvatorn skär himmelsmeridianerna i räta vinklar. Ekvatorn är en imaginär cirkel som sträcker sig runt hela himlen, och stjärnor som befinner sig längs den går upp och ner exakt i öster och väster.
- ★ **E (Öst)**: Punkten på himmelsfären där himmelsekvatorn skär horisontcirkeln i östlig riktning och markerar horisontens östligaste punkt.
- ★ **W (Väst)**: Punkten på himmelsfären där himmelsekvatorn skär horisontcirkeln i västlig riktning och markerar horisontens västligaste punkt.
- ★ **R och T (Översta och Nedersta Punkten av Himmelsekvatorn)** — Dessa punkter har ingen särskild betydelse; de representerar helt enkelt den högsta (längst ovanför horisonten) och den lägsta (längst under horisonten) positionen av himmelsekvatorn.

## 5 Rymdkoordinater

Det finns flera olika koordinatsystem som astronomer använder. När vi studerar stjärnhimlen brukar vi göra det enkelt för oss själva och se universum som geocentriskt vilket leder oss till att använda himmelssfären för våra system.

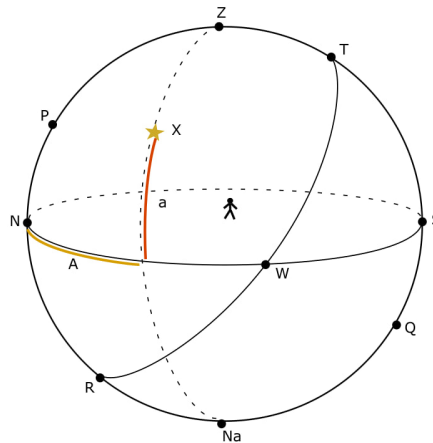
Centralt för dessa system är att vi definierar den så kallade **ekliptikan** vilket är den bana på stjärnhimlen som solen tar under ett år, vilket också är den ungefärliga banan alla planeter tar över himlen. Denna linje är i  $23,5^\circ$  vinkel mot himmelsekvatorn och korsar i två punkter, **höstdagjämningspunkten** och **vårdagjämningspunkten**, vilket är där solen befinner sig under höstdagjämning respektive vårdagjämning.

### 5.1 Alt-azimut

Detta är kanske det mest intuitiva systemet och utgår mycket från hur vi ser saker från jorden. Systemet utgår från hur stjärnhimlen ser från observatörens håll. Vi behöver två koordinataxlar för att beskriva himlen.

- ★ **Höjd/altitud** är den vinkelräta avståndet från objektet till horisonten: negativt nedanför och positivt ovanför. Vid horisonten är  $a = 0^\circ$ , och vid zenit (rakt ovanför) är  $a = 90^\circ$ . Höjden kan inte överstiga 90 grader.
- ★ **Azimut** är den vinkelräta avståndet från norr längs horisonten, mätt medurs, och sträcker sig från  $0^\circ$  till  $360^\circ$ . Till exempel:
  - Norr (N) har  $A = 0^\circ$
  - Öst (E) har  $A = 90^\circ$
  - Syd (S) har  $A = 180^\circ$
  - Väst (W) har  $A = 270^\circ$

Även om dessa definitioner kan verka komplexa, gör en visualisering på en sfär, som visas i Figur 3.8, allt mycket tydligare.



**Figur 3.8:** Representation av Höjd och Azimut system

Alt-azimut systemet är ett bra system för att ange hur teleskop ska riktas för att finna rätt stjärna utifrån väderstrecken. Problemet är att på grund av jordens rotation så ändras stjärnornas koordinater väldigt snabbt och eftersom jorden är rund så kommer observatörer på olika platser få olika koordinater för samma stjärna vid samma tid.

## 5.2 Ekvatoriellt (lokalt)

Det **Ekvatoriella (lokala)** koordinatsystemet är baserat på den himmelska ekvatorn och utgör ett steg mot det **Ekvatoriella (sideriska)** koordinatsystemet, som är oberoende av observatörens plats och tid.

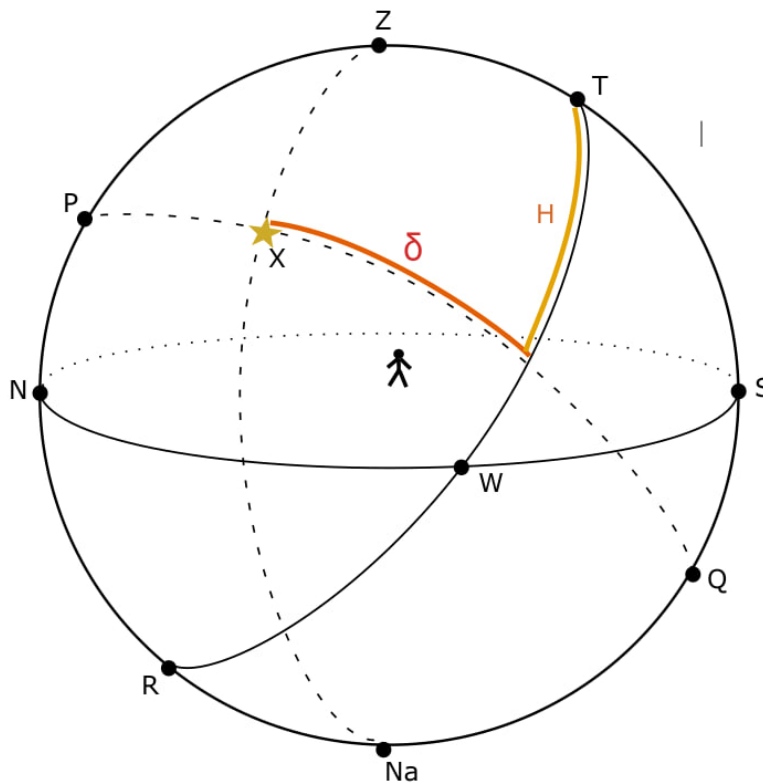
Jämfört med Alt-Azimut-koordinatsystemet, där koordinaterna snabbt förändras med tid och plats, erbjuder det lokala ekvatoriella systemet en mer stabil referensram. Det används ofta som ett mellanled för att överföra information från Alt-Azimut till det sideriska systemet. Detta system kräver två vinklar: .

- \* **Tidsvinkel (H)** är som longitud men på himlen. Den mäts längs den himmelska ekvatorn, med start från punkten *T* (den högsta punkten på den himmelska ekvatorn) och rör sig mot väster. Eftersom alla objekt roterar parallellt med ekvatorn, representerar denna vinkel tiden. (När tiden går ändras *H*.) Till exempel vid punkt *T* är  $H = 0^\circ$ . Punkten *W* har  $H = 90^\circ$ , och punkten *E* kan ha  $H = -90^\circ$  eller  $H = 270^\circ$  (vi föredrar  $H = -90^\circ$ ).
- \* **Dekliniation (Dec eller  $\delta$ )** är analog med höjd, men den definieras från den himmelska ekvatorn. När man rör sig norrut ökar deklinationen, och när man rör sig söderut minskar den. Till exempel:

Vid punkt *P*,  $\delta = 90^\circ$  och vid punkt *Q*,  $\delta = -90^\circ$

En punkt på den himmelska ekvatorn har  $\delta = 0^\circ$ .

För bättre förståelse, se illustrationerna i Figur 3.9.



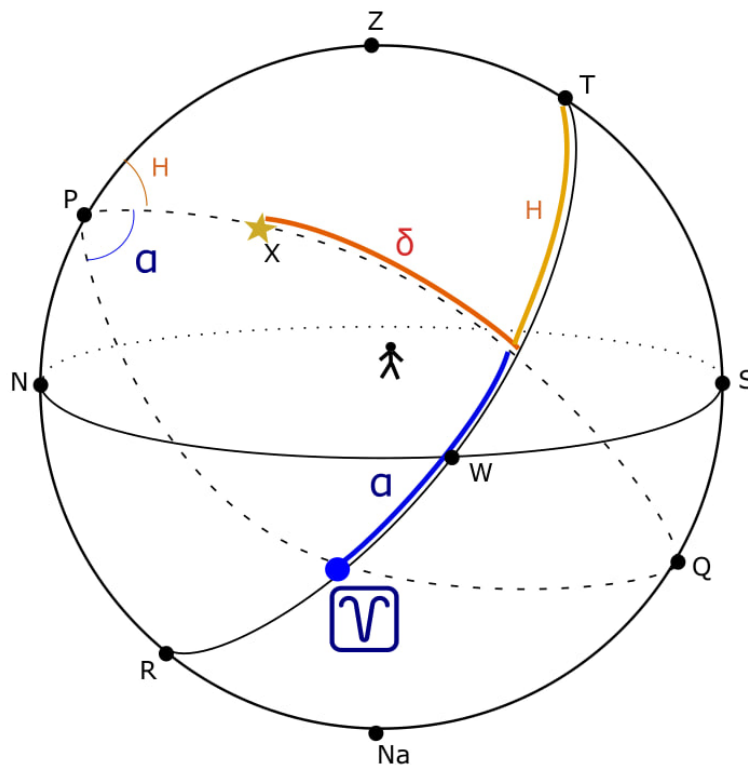
**Figur 3.9:** Illustration av det Ekvatoriellt (lokalt) Koordinatsystemet

### 5.3 Ekvatorial (siderisk)

Det finns en viktig punkt på himmelsekvatorn som kallas **vårdagjämningspunkten**. Den symboliseras ofta som  $\Upsilon$ , vilket syftar på zodiaktecknet **Väduren (Aries)**. Vårdagjämningspunkten markerar den position på himlen (ungefär i stjärnbilden Väduren) där man vid vårens början ser solen. Det är också en av de två tidpunkter då solen passerar himmelsekvatorn. Därför är vårdagjämningspunkten en central referenspunkt på himlen.

I det **Ekvatoriella (sideriska)** koordinatsystemet är **deklinations** ( $\delta$ ) samma som tidigare, men vi använder inte längre timvinkeln ( $H$ ). Istället inför vi en mer allmän koordinat: **rektascension** ( $\alpha$ ), som är vinkeln mätt längs himmelsekvatorn relativt vårdagjämningspunkten. Rektascension liknar timvinkeln, men den är inte exakt samma sak. **Notera!** En bågsekund deklination är inte samma avstånd som en sekund rektascension!

Under dygnet "rör sig" vårdagjämningspunkten längs himmelsekvatorn på grund av jordens rotation. Genom att känna till tiden kan vi bestämma var vårdagjämningspunkten är, och därmed koppla tidvinkel och rektascension till varandra. Det här koordinatsystemet visas i Figur 3.10



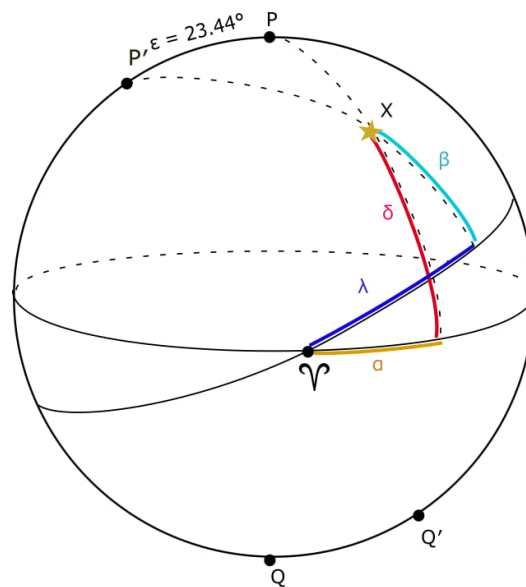
Figur 3.10: Illustration of Right Ascension ( $\alpha$ ) with respect to the Vernal Equinox.

### 5.4 Ekliptiska koordinatsystemet

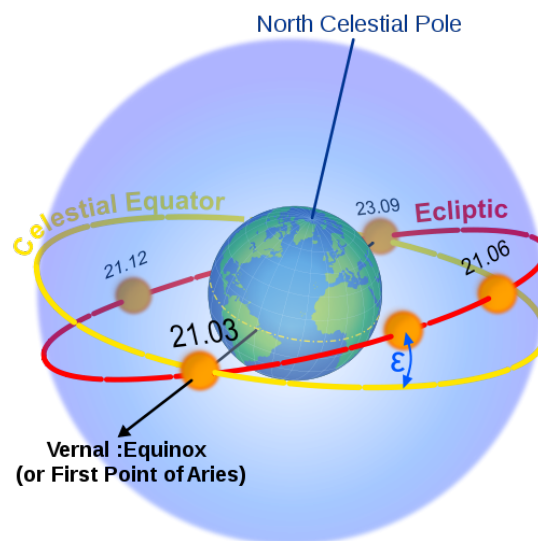
Det *ekliptiska koordinatsystemet* bygger på det plan där jorden rör sig runt solen, alltså *ekliptikplanet*. Solens väg över året ligger i detta plan, och vinkeln mellan ekliptikplanet och himmelsekvatorn är ungefär  $\epsilon = 23.44^\circ$ . Detta system ritas ofta tillsammans med himmelsekvatorn för att man ska se lutningen tydligt.

Precis som i det *ekvatoriella koordinatsystemet* använder det ekliptiska systemet två huvudkoordinater: *ekliptisk longitud* ( $\lambda$ ) och *ekliptisk latitud* ( $\beta$ ). Dessa beskriver var himlakroppar ligger i

förhållande till ekliptikplanet. Diagrammet i Figur 3.12 visar detta mer i detalj.



**Figur 3.11:** Ecliptic coordinate system

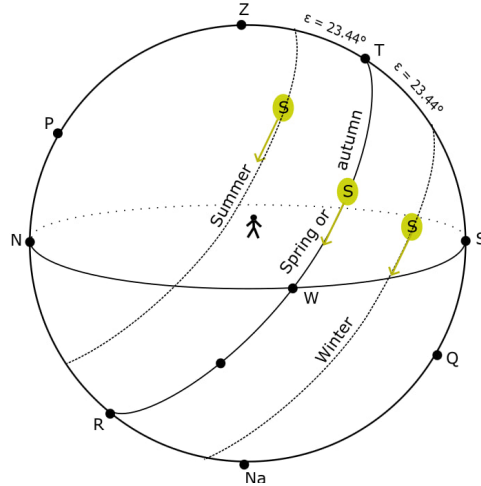


**Figur 3.12:** Ekliptiska koordinatsystemet från jordens perspektiv

## 5.5 Solen på ett sfär

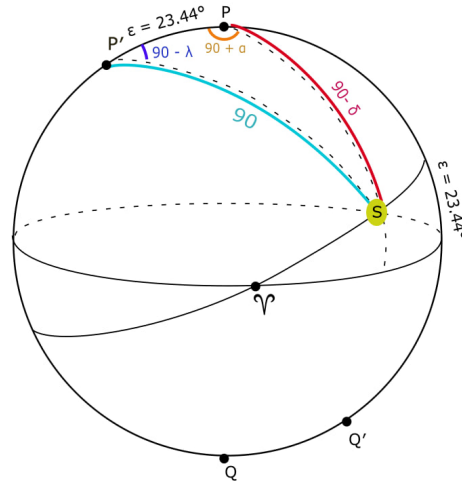
Solen rör sig längs ekliptikan. Det betyder att i början av våren, runt **20 mars**, är solen vid **vårdagjämningspunkten**. I början av sommaren (på norra halvklotet), runt **21 juni**, når solen sitt största vinkelavstånd ovanför himmelsekvatorn, ungefär  $23.44^\circ$ , vilket kallas **sommarsolståndet**. I början av vintern, runt **21 december**, ligger solen ungefär  $23.44^\circ$  under ekvatorn, vilket kallas **vintersolståndet**.

Under en enda dag kan man (med god approximation) anta att solen har konstant deklination  $\delta$ . Det betyder att den rör sig parallellt med himmelsekvatorn under dagen. Denna dagliga rörelse visas i Figur 3.13.



**Figur 3.13:** Sun's movement during a day for different seasons

Nu går vi tillbaka till det ekliptiska koordinatsystemet och beskriver solen i det systemet. Eftersom solen ligger på ekliptikan har den ekliptisk latitud  $\beta_{\text{sun}} = 0^\circ$ . Detta visas i Figur 3.14.



**Figur 3.14:** Sun's movement during a day in the ecliptic coordinate system

Nu kan vi skriva några viktiga ekvationer som kopplar solens **rektascension**  $\alpha$ , **ekliptisk longitud**  $\lambda$ , och **deklination**  $\delta$ . Bevisen lämnas som en övning till de som läser extra kapitlet:

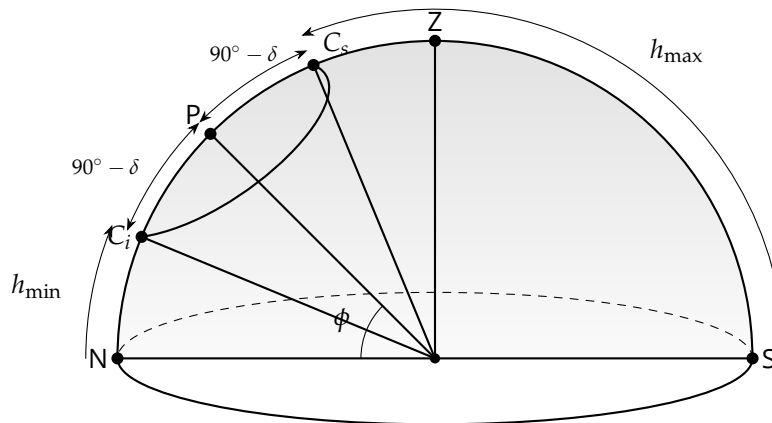
$$\sin(\delta_{\text{sun}}) = \sin(\epsilon) \sin(\lambda_{\text{sun}}) \quad \sin(\alpha_{\text{sun}}) = \frac{\tan(\delta_{\text{sun}})}{\tan(\epsilon)} \quad (3.4)$$

$$\lambda(t) \approx \frac{360}{365.25} N, \quad N = \text{Current Date} - \text{Vernal Equinox Date} \quad (3.5)$$

## 6 Kulmination

En himlakropp **kulminerar** när den passerar din **lokala meridian**. Det är planet som går genom zenit ( $Z$ ), himmelspolerna ( $P$ ) och observatören. Under ett dygn passerar ett objekt meridianen två gånger: en gång när det står som högst på himlen (**övre kulmination**) och en gång när det står som lägst (**nedre kulmination**).

I meridianplanet kan vi härleda objektets höjd över horisonten genom att använda observatörens **latitud**  $\phi$  och objektets **deklination**  $\delta$ .



**Figur 3.15:** Referenssystem för kulmination.  $C_s$  markerar övre kulmination och  $C_i$  markerar nedre kulmination.

### Övre kulmination ( $h_{\max}$ )

Vid övre kulmination befinner sig objektet vid punkten  $C_s$ , som visas i figur 3.15. Denna punkt kan antingen ligga söder om zenit (höger i figuren) eller norr om zenit (vänster i figuren). Härledningen av maxhöjden  $h_{\max}$  med hjälp av figuren lämnas som en övning till läsaren.

Om objektet kulminerar söder om zenit gäller

$$h_{\max} = 90^\circ - \phi + \delta \quad (3.6)$$

Om objektet istället kulminerar norr om zenit gäller

$$h_{\max} = 90^\circ + \phi - \delta \quad (3.7)$$

Observera att dessa två uttryck är supplementvinklar. Det vill säga att Ekvation 3.7 kommer ifrån  $180^\circ$  – Ekvation 3.6

### Nedre kulmination ( $h_{\min}$ )

Vid nedre kulmination befinner sig objektet vid punkten  $C_i$ . Detta är objektets lägsta punkt under dess dagliga rotation runt himmelspolen  $P$ . Vi använder två centrala geometriska fakta:

- ★ Norra himmelspolens höjd över horisonten är lika med latituden:

$$h_P = \phi$$

- ★ Objektets vinkelavstånd från polen (poldistansen) är

$$90^\circ - \delta$$

Den lägsta höjden erhålls genom att subtrahera poldistansen från polens höjd:

$$h_{\min} = \phi - (90^\circ - \delta)$$

Vilket förenklas till

$$h_{\min} = \phi + \delta - 90^\circ \quad (3.8)$$

**Notera:**

- ★ Om  $h_{\min} > 0^\circ$  går objektet aldrig ner under horisonten. Det är då **cirkumpolärt**.
- ★ Om  $h_{\min} < 0^\circ$  går objektet aldrig upp över horisonten och kan därför inte observeras från denna latitud.

Begreppet kulmination gäller **inte** enbart stjärnor utan även andra himlakroppar, till exempel solen.

**Relationer mellan  $h_{\max}$  och  $h_{\min}$**

De två kulminationshöjderna innehåller tillsammans **fullständig information** om objektets dagliga rörelse. Särskilt användbara är deras summa och differens.

Med uttrycken ovan får vi

$$\frac{h_{\max} + h_{\min}}{2} = \delta \quad (3.9)$$

Detta visar att medelvärdet av den högsta och lägsta höjden direkt ger objektets deklination. Vidare fås

$$\frac{h_{\max} - h_{\min}}{2} = 90^\circ - \phi \quad (3.10)$$

Detta innebär att halva skillnaden mellan kulminationshöjderna ger zenitavståndet för himmelspolen, vilket i sin tur bestämmer observatörens latitud.

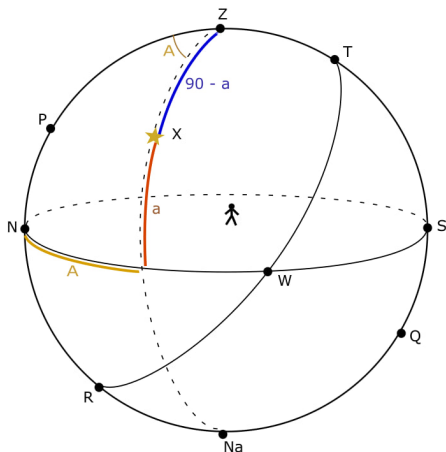
Dessa relationer är särskilt användbara i praktiken: genom att mäta ett objekts högsta och lägsta höjd kan man alltså bestämma både dess deklination och observatörens latitud.

## 7 Övningar - 1

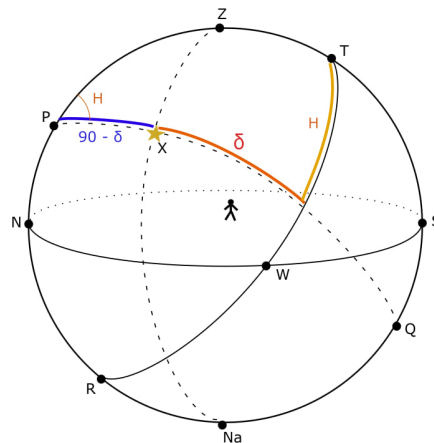
1. Vid en observation mäter en Doni att en stjärnas högsta höjd är  $68^\circ$  och dess lägsta höjd är  $12^\circ$ .
  - (a) Bestäm observatörens latitud.
  - (b) Bestäm stjärnans deklination.
  - (c) Är stjärnan cirkumpolär?
2. Då Hugo drabbats av hemlängtan beslutade han sig att flyga från München ( **$48^\circ\text{N}$ ,  $11,5^\circ\text{E}$** ) till Göteborg ( **$57^\circ\text{N}$ ,  $12^\circ\text{E}$** ). Vad blir storcirkelavståndet de skulle resa, om jordens radie är 6371 km?
3. Efter att ha förväxlat "Austria" med "Australia" hamnade Mostafa på ett flyg mot Sydney ( **$34^\circ\text{S}$ ,  $151^\circ\text{E}$** ) istället för Alperna. Resan utgick från Lund ( **$56^\circ\text{N}$ ,  $13^\circ\text{E}$** ). Vad blir storcirkelavståndet de skulle resa, om jordens radie är 6371 km?
4. Härled Ekvation 3.9 samt Ekvation 3.10 från ekvationerna för  $h_{max}$  och  $h_{min}$
5. En observatör på okänd plats mäter att en viss stjärna har  $h_{max} = 74^\circ$  och  $h_{min} = -6^\circ$ . Kan du hjälpa honom börja undersöka var han befinner sig?
6. En stjärna är cirkumpolär för en observatör på latitud  $\phi$ .
  - (a) Visa att villkoret för cirkumpolaritet kan skrivas  $\delta > 90^\circ - \phi$ .
  - (b) Förklara **geometriskt** med hjälp av figuren varför detta måste vara sant.
7. En observatör i Sverige märker att en viss stjärna kulminerar **exakt i zenit**.
  - (a) Vad kan du säga om sambandet mellan stjärnans deklination och observatörens latitud?
  - (b) Vad blir då  $h_{min}$  för denna stjärna?
8. Härled med hjälp av figur Figur 3.15 ekvationen till  $h_{max}$  ifall stjärnan kulminerar norr om zenit.
9. En dag under **våren** ser Sarah solen på en viss höjd över horisonten. Hon undrar vilken deklination solen har den dagen.  
Om solens deklination är ungefär  **$10^\circ$** , vilken tid på året är det troligt att det är?
10. Den **1 maj** monterar Victor sin kamera på ett stativ för att fotografera solens läge vid lokal middagstid. Han är nyfiken på hur långt norr om himmelsekvatorn solen verkar ligga och ber dig bestämma solens deklination det datumet.
11. **Anders på jorden** (AO Sr Final 2024) Anders står på norra halvklotet och lade märke till att längden hos den kortaste skuggan för en 1,00 m lång vertikal stång en dag var 1,83 m och att den längsta skuggan samma dag var 9,99 m. Beräkna latituden för observatören och solens deklination denna dag.
12. (AO Sr Final 2023) En katt vid namn Schrödinger på norra halvklotet märkte att längden på den kortaste skuggan från en 1.000 m lång vertikal pinne under en viss dag var  $l_{min} = 1.732$  m, och att samma pinne på samma dag hade en maximal skugglängd på 5.671 m. Bestäm latituden Schrödinger befinner sig på, samt solens deklination på den dagen. Solen kan modelleras som en punktkälla och du kan försumma atmosfäriska effekter.

## 8 Extra: Transformation mellan Alt-Azimut och Ekvatorielt

För att utföra transformationen mellan Alt-Azimut och Ekvatorielt (lokalt) är det första steget att identifiera de motsvarande vinklarna. Genom att tillämpa geometriska principer kan vi härleda dessa vinklar, som är avgörande för konverteringen. Dessa vinklar visas i Figur 3.18



**Figur 3.16:** Alt-Azimut Koordinatsystem

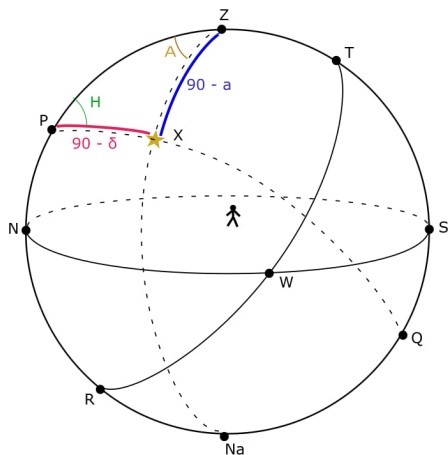


**Figur 3.17:** Ekvatorielt (lokalt)

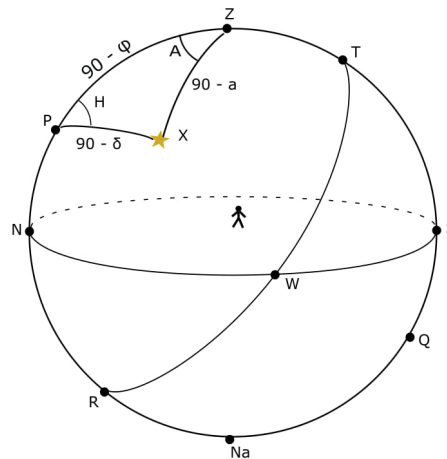
**Figur 3.18:** Motsvarande vinklar

I sfärisk geometri är en av de viktigaste trianglarna **\*\*PZX triangeln\*\***, där Z representerar objektet eller stjärnan vi observerar. Denna triangel är avgörande för att transformera mellan koordinatsystem.

De vinklar och den information vi behöver kan alla samlas i denna triangel, som visas i figuren nedan:



**Figur 3.19:** Första illustration av PZX triangeln.



**Figur 3.20:** Andra illustration av PZX triangeln.

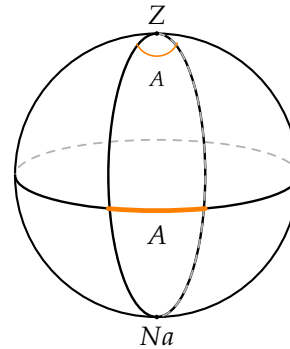
**Figur 3.21:** PZX Triangeln i Sfärisk Geometri.

### Azimutvinkeln i PZX-triangeln

Azimutvinkeln  $A$  bildas vid zenitpunkten  $Z$  mellan meridianplanet (som går genom  $P$  och  $Z$ ) och objektets vertikalcirkel.

Eftersom båda dessa är storcirklar genom sfärens centrum, är vinkeln mellan dem lika med den centrala vinkel som spärras upp vid centrum.

Detta innebär att vinkeln från zenit ner till horisonten motsvarar samma vinkelmått som sidan längs ekvatorn i den sfäriska triangeln.



**Figur 3.22:** Azimut  $A$  som vinkel vid zenit och motsvarande båge längs horisonten.

Genom att använda **cosinus-** och **sinus-**satserna kan vi utföra de nödvändiga transformationerna mellan de två koordinatsystemen. Om du får tre komponenter av en sfärisk triangel (vinklar eller sidlängder), kan du bestämma de återstående okända.

Till exempel:

- Om du vet Deklination ( $\delta$ ), Latitud ( $\phi$ ) och Tidsvinkel ( $H$ ), kan du beräkna Höjd ( $a$ ) med

$$\sin a = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H, \quad (3.11)$$

och Azimut ( $A$ ) kan bestämmas genom

$$\cos A = \frac{\sin \delta - \sin \phi \sin a}{\cos \phi \cos a}. \quad (3.12)$$

- Alternativt, genom att känna till Höjd ( $a$ ), Tidsvinkel ( $H$ ) och Deklination ( $\delta$ ), kan du bestämma Latitud ( $\phi$ ) via

$$\sin \phi = \frac{\sin a - \cos \phi \cos \delta \cos H}{\sin \delta}, \quad (3.13)$$

eller genom att istället använda omarrangerad sinuslag från PZX-triangeln. Azimut ( $A$ ) kan då fås från

$$\sin A = \frac{\cos \delta \sin H}{\cos a}. \quad (3.14)$$

**Dessa var enbart \*\*exempel\*\*** och inget man *måste* komma ihåg. Du kan på samma sätt konstruera andra användbara ekvationer beroende på vilka tre storheter som är givna.

## 9 Övningar - 2

1. Rita PZX triangeln med alla dess vinklar.
2. Stjärnan Betelgeuse har deklinationen  $\delta = 7^\circ$  och dess nuvarande timvinkel är  $H = 60^\circ$ . Anta en observatör i Stockholm, Sverige (latitud  $\phi = 59^\circ$  North). Hur högt över horisonten är Betelgeuse just nu (dess Altitude)?
3. Stjärnan Sirius har deklinationen  $\delta = -17^\circ$ . En observatör i Köpenhamn, Danmark (latitud  $\phi = 55^\circ$  North) ser att Sirius precis går upp över horisonten. Vad är Sirius timvinkel i det ögonblicket den går upp?
4. At latitude  $\phi = 45^\circ$  N, the star **Vega** ( $\delta = +39^\circ$ ,  $\alpha = 18^{\text{h}}36^{\text{m}}56^{\text{s}}$ ) is just rising on the eastern horizon.  
Alex wants to know in which direction he should look to see it's rising. Calculate its azimuth  $A$ , measured eastward from true north, at the moment of rising (altitude  $h = 0$ ).
5. I början av våren, på **20 mars**, i **Paris, Frankrike**, placeras en pinne med längd 1 meter på marken. Vid middagstid står solen inte rakt ovanför. Istället bildar den en vinkel med horisonten som beror på platsens latitud och tiden på året. Beräkna längden på skuggan som pinnen kastar vid middagstid detta datum. Antag att pinnen är vertikal och att solens höjdvinkel bestäms av Paris latitud (ungefär  $48^\circ$  North) och solens deklination vid vårdagjämningen (som är  $0^\circ$ ).
6. På **vårdagjämningen** (20 mars), i **Madrid, Spanien**, står Aria (1.8 meter lång) upp på marken. Kl. **12:00** ser Aria den kortaste skuggan. När eftermiddagen går blir skuggan längre. Beräkna längden på Arias skugga kl. **15:00**. Antag att Madrids latitud är  $40^\circ$ .
7. Bevis följande för solen:

$$\sin(\delta_{sun}) = \sin(\epsilon) \sin(\lambda_{sun})$$

$$\sin(\alpha_{sun}) = \frac{\tan(\delta_{sun})}{\tan(\epsilon)}$$

# Kapitel 4

## Optik

### 1 Bakgrund

När vi gör observationer av objekt i rymden ligger de så långt borta att vi kan approximera ljuset från objekten som parallella ljusstrålar, detta är viktigt för att förstå hur optiken i ett teleskop fungerar.

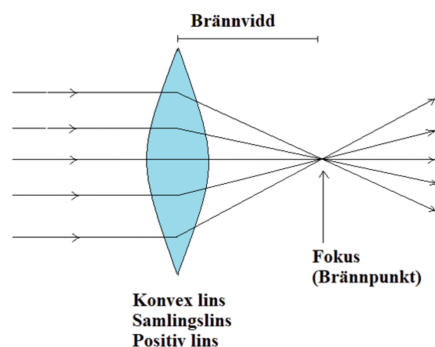
### 2 Linser

Linser är genomskinliga optiska element som böjer ljus. När ljus passerar från ett material till ett annat, till exempel från luft till glas, ändras ljusets hastighet. När hastigheten ändras ändras även riktningen. Detta fenomen kallas **brytning**.

Brytningen beskrivs matematiskt av Snells lag, men i detta kapitel fokuserar vi på de geometriska konsekvenserna: hur strålar ändrar riktning och var de möts.

#### Samlingslins - Konvex lins

En samlingslins är tjockare i mitten än vid kanterna. Parallella ljusstrålar som träffar linsen bryts så att de möts i en punkt bakom linsen. Denna punkt kallas **fokus**.



**Figur 4.1:** Parallella strålar som bryts i en samlingslins och möts i fokus. Källa: <https://fysik.ugglansno.se/kurs-optik/>

Avståndet mellan linsen och fokus kallas **fokallängd** och betecknas  $f$ .

## Linsformeln

När objektet inte ligger på oändligt avstånd gäller den så kallade linsformeln:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (4.1)$$

Där:

- \*  $f$  är fokallängden
- \*  $a$  är objektavståndet
- \*  $b$  är bildavståndet

För astronomiska objekt gäller  $a \rightarrow \infty$ , vilket ger:

$$\frac{1}{a} \approx 0$$

och därmed:

$$b \approx f$$

## Bildens orientering

När en samlingslins skapar en verklig bild blir den: Upp och ner. Och Spegelvänd

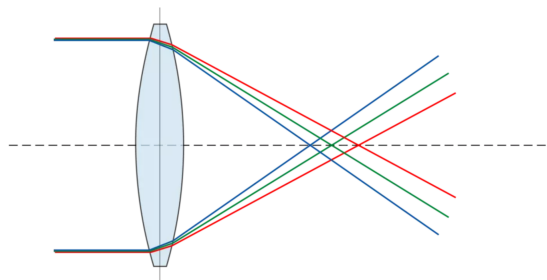
Detta är anledningen till att bilden i ett astronomiskt teleskop är inverterad. För astronomi spelar detta ingen roll.

## Aberrationer

I verkligheten är linser inte perfekta.

**Sfärisk aberration** uppstår eftersom strålar nära kanten bryts annorlunda än strålar nära centrum.

**Kromatisk aberration** uppstår eftersom olika våglängder bryts olika mycket. Blått ljus fokuseras närmare linsen än rött ljus.



**Figur 4.2:** Illustration av kromatisk aberration. Källa: <https://en-academic.com/dic.nsf/enwiki/2209714>

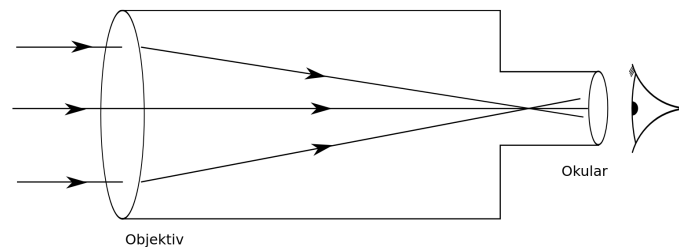
Det är därför reflektorteleskop ofta används i professionell astronomi, eftersom speglar inte lider av kromatisk aberration.

### 3 Teleskop

Teleskop är astronomens främsta verktyg när det kommer till observationer. Teleskop kommer i många olika former och alla har sina för och nackdelar men i grunden fungerar alla på samma sätt.

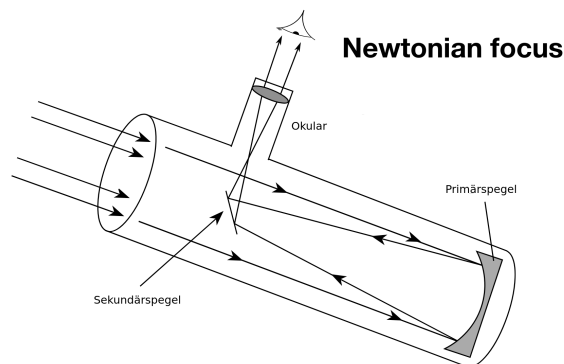
Teleskopets jobb är att ta ljus från en stor yta och koncentrera det på en liten yta, detta görs med en serie linser eller speglar. Teleskop som består av linser kallas för refraktorer och teleskop som använder sig av speglar kallas reflektorer. Alla teleskop består av ett objektiv och ett okular, dessa beskrivs ofta med en så kallad brännvidd och en fokallängd. Brännvidden är diametern på en ljusinsamlande öppningen och är mest relevant för objektivet och fokallängden är avståndet mellan öppningen och fokus eller den punkt där allt ljus samlas.

Det är viktigt att förstå att objektivet samlar in ljus och skapar bilden, medan okularet förstorar den redan skapade bilden.



**Figur 4.3:** Schematisk bild av en refraktor. Linjerna visar ljusets väg i teleskopet.

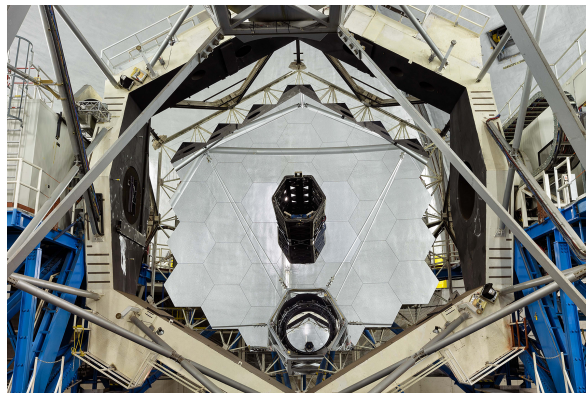
I figuren ovan syns ett exempel på hur en refraktor kan se ut. Ljuset kommer in genom öppningen till höger där det bryts av en lins till fokus. Sedan bryter en lins i okularet ljuset igen så det träffar ögat återigen som parallella strålar och bilden kan återskapas på näthinnan. Den observante inser också att det man ser när man tittar genom ett teleskop kommer var upp och ner.



**Figur 4.4:** Schematisk bild över en reflektor. Linjerna visar ljusets väg i teleskopet.

Ovan syns en reflektor. Detta teleskop använder sig av paraboliska speglar för att uppnå samma effekt som refraktorn. Bilden visar en reflektor med så kallat newtonskt fokus detta

innebär att det finns en sekundär spegel som är vinklad  $45^\circ$  och dirigerar ut ljuset genom sidan på objektivet där vi återigen hittar ett okular. Det finns ett antal olika fokus som används i reflektor teleskop newtonskt är ett av dem enklaste ett annat som är mycket vanlig syns i figuren nedan och är helt enkelt ett hål i primär spegeln så man kan dirigera ljuset vidare till stora tunga instrument.



**Figur 4.5:** Här ser vi primärspegeln på ett av de två Keck teleskopen. Det finns ett rör mitt i där allt ljus från sekundärspegel åker vidare till alla instrument nere i någon källare. Detta är ett så kallar Cassegrain fokus. [9]

## 4 Förstoring och upplösning

En viktig egenskap hos ett teleskop är hur mycket förstoring den ger. Detta är viktigt att veta så vi kan välja rätt utrustning för att observera olika objekt. När vi observerar med ett teleskop använder vi oss av ett objektiv och ett okular dessa har varsin fokallängd och för att få fram förstoringen för uppställningen dividerar vi dessa fokallängderna med varandra.

$$\frac{\text{fokallängd objektiv}}{\text{fokallängd okular}} = \text{förstoring} \quad (4.2)$$

Det är viktigt att förstå att hög förstoring inte automatiskt betyder bättre bild. Om förstoringen är för hög i förhållande till teleskopets diameter blir bilden mörk och suddig.

När vi observerar så kan det finnas objekt på himlen som verkar ligga väldigt nära varandra. I vissa fall kan dessa objekt ligga så nära varandra att de verkar vara ett och samma objekt när dom observeras. Det finns en formel som beskriver hur små vinkelavstånd ett teleskop upplösa eller hur nära två stjärnor kan ligga varandra på himlen för att ett teleskop ska kunna urskilja dem. Formeln kallas för **Rayleigh kriteriet** och ser ut som

$$\Theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}. \quad (4.3)$$

I formeln ovan är  $\lambda$  våglängden av ljuset vi observerar i  $D$  är diametern på objektivet som används och  $\Theta$  är det minsta vinkelavståndet teleskopet kan upplösa. Formeln antar små vinklar och faktorn 1.22 kommer från beräkningen av avståndet till första diffraktionsminimat, matematiskt kommer siffran från det första nollstället i första ordningens besselfunktion.

Rayleighkriteriet visar att upplösningen förbättras när våglängden minskar eller när diametern ökar. Därför byggs stora teleskop med så stora speglar som möjligt.

## 4.1 Synfält och ljusinsamling

En annan viktig egenskap hos ett teleskop är hur mycket ljus de samlar in. Denna ljusinsamlingsförmåga är proportionell mot öppningens area eller kvadraten av öppningens radie. Ett stort teleskop kan alltså både upplösa mindre vinkelavstånd och samlar in mer ljus vilket ger en tydligare bild.

$$\text{Ljusinsamlingsförmåga} \propto R^2 \quad (4.4)$$

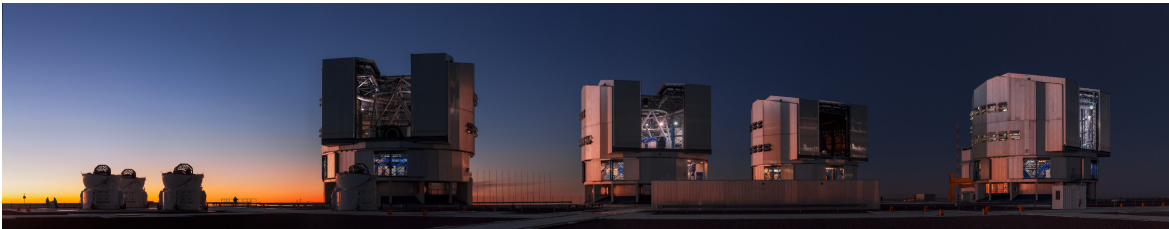
Eftersom arean växer med kvadraten på radien betyder det att en fördubbling av diametern ger fyra gånger mer ljus.

Synfältet för ett teleskop är hur stor del av himlen som syns genom teleskopet. Synfältet mäts i grader och beror på teleskopets förstoring och okularets synfält. Okularets synfält är en specifikation hos okularet och är givet av tillverkaren. För att få synfältet hos teleskopet dividerar vi okularets synfält med förstoringen hos teleskopet.

$$\frac{\text{Synfält}_{\text{okular}}}{\text{Förstoring}} = \text{Synfält} \quad (4.5)$$

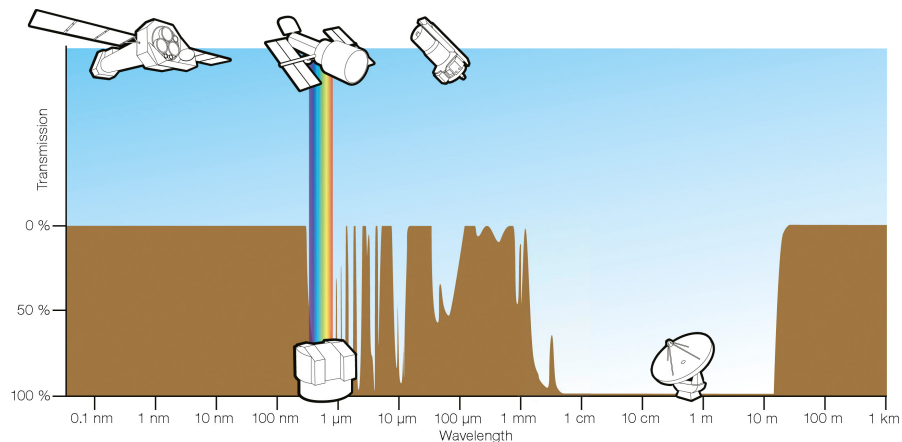
## 4.2 Seeing och rymdteleskop

En annan utmaning med teleskop är det som kallas för atmosfärisk seeing. Det är ett samlingsnamn för alla atmosfäriska effekter som påverkar observationer med markbaserade teleskop. Turbulens, temperaturskillnader och variation i kemisk uppbyggnad är alla saker som påverkar hur ljuset bryts när det färdas genom atmosfären och försämrar kvaliteten på de observationer man kan göra. En ideal plats för ett teleskop är därmed någonstans högt upp på en torr plats.



**Figur 4.6:** ESO's Paranal observatorie på den högsta punkten i Atacama öknen i Chile. [4]

Ett sätt att komma runt det där med seeing så kan man skjuta upp teleskopet i rymden och därmed undvika atmosfären helt. Rymdteleskop slipper alltså helt de nackdelar som finns med markbaserade teleskop. För vissa observationer är det till och med nödvändigt att observera från rymden då atmosfären inte släpper igenom alla våglängder.



**Figur 4.7:** Här ser vi atmosfärens genomskinlighet för olika våglängder.[5]

Dock så är markbaserade teleskop fortfarande mycket viktiga för forskning då det är ekonomiskt orealistiskt att skicka upp teleskop i rymden av samma storlek som dom vi kan bygga på marken.

## 5 Uppgifter

- 4.1** Varför kan vi behandla stjärnljus som parallellt?
- 4.2** Varför blir bilden upp och ner i ett astronomiskt teleskop?
- 4.3** Två stjärnor ligger nära varandra. Är det bättre att öka diametern av teleskopet eller förstoringen för att lättare skilja dem åt? Motivera kort.
- 4.4 Okularkarusellen** Ett teleskop har objektivets fokallängd  $f_{\text{obj}} = 1200$  mm. Du byter mellan tre okular:  $f_{\text{ok}} = 25$  mm, 10 mm och 6 mm. Vilket okular ger störst förstoring? Hur mycket?
- 4.5 Synfältsspelet** Ett okular har ett synfält på  $52^\circ$  (en siffra som ofta står på okularet). Du använder samma teleskop som i uppgiften ovan ( $f_{\text{obj}} = 1200$  mm).
- Beräkna teleskopets synfält när du använder  $f_{\text{ok}} = 25$  mm.
  - Beräkna teleskopets synfält när du använder  $f_{\text{ok}} = 10$  mm.
  - Förklara med en mening varför synfältet ändras.
- 4.6 Rayleighs laser** Du observerar i grönt ljus med våglängd  $\lambda = 550$  nm.
- Beräkna upplösningen  $\Theta$  (i radianer) för ett teleskop med diameter  $D = 60$  mm.
  - Beräkna upplösningen för  $D = 120$  mm.
  - Vad händer med  $\Theta$  när diametern fördubblas?
- 4.7 Donis stjärnduett** Två stjärnor observeras med ett vinkelavstånd på  $2,0''$  (bågsekunder).
- Omvandla vinkelavståndet  $2,0''$  till grader. Svara i grundpotensform.
  - Omvandla vinkelavståndet till radianer. Använd att  $1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$  eller det exakta sambandet  $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ .
  - Din vän Doni använder ett teleskop med en objektivdiameter på  $D = 0,10$  m (10 cm). Han kan precis särskilja de två stjärnorna separat. Beräkna vilken våglängd  $\lambda$  ljuset har.

**4.8 Hur stor öppning behövs?** Du vill kunna upplösa två punkter som ligger  $1.0''$  ifrån varandra. Antag  $\lambda = 550 \text{ nm}$  och använd Rayleighkriteriet.

- (a) Beräkna vilken diameter  $D$  som minst behövs (svara i meter).

**4.9 Light up those pixels** Två teleskop har diametrar  $D_1 = 80 \text{ mm}$  och  $D_2 = 200 \text{ mm}$ .

- (a) Hur många gånger mer ljus samlar

det större teleskopet in? (Tips: ljusinsamling  $\propto D^2$ .)

**4.10 Stjärnan närmare än solen** En modellstjärna står i ett klassrum  $a = 5.0 \text{ m}$  framför en samlingslins med fokallängd  $f = 20 \text{ cm}$ .

- (a) Använd linsformeln för att beräkna bildavståndet  $b$ .  
 (b) Jämför  $b$  med  $f$ . Är de nästan lika? Varför eller varför inte?

## AO Sr Finaluppgifter

**4.11 Hugo och teleskopet** (Final 2024) För ett ickeroterande oladdat svart hål kan man bestämma dess Hawkingstrålning. Detta motsvarar avdunstningen av ett svart hål och kan approximeras som svartkroppsstrålning. I verkligheten kan även andra typer av partiklar strålas ut, men för enkelhetens skull antar vi att strålningen endast består av fotoner. Hawkingtemperaturen för strålningen ges enligt

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}$$

Hugo observerar ett svart hål med sitt teleskop. Det svarta hålet har massan  $M = 10^{11} \text{ kg}$ . Det svarta hålet befinner sig på ett avstånd  $0,1 \text{ Mpc}$ . I många fall väljer man i fysik att skriva  $\hbar$ , vilket är ett alternativt sätt att skriva  $\frac{h}{2\pi}$ .

- (a) Bestäm vilken diameter på Hugos teleskop som krävs för att han skall

kunna observera det svarta hålets Hawkingstrålning. Antag att Hugo kan uppfatta alla våglängder på hela spektrumet och att gränsmagnituden för ett teleskop beror på dess diameter (i meter) genom

$$m = 16,77 + 5 \log D.$$

- (b) Bestäm det svarta hålets resterande livstid  $t$  om det svarta hålet håller en konstant Hawkingstrålning på  $P = \frac{E}{t}$ .

**4.12** (Final 2023) I magnethuset finns ett reflektorteleskop med 10 tums diameter spegel, F-tal  $f/10$ , och brännvidd  $2500 \text{ mm}$ . Bestäm om en människa kan urskilja Jupiters röda fläck (vilken har diameter  $2,6D_{\oplus}$ ) med det teleskopet, när den använder ett okular med  $25 \text{ mm}$  brännvidd. Bortse från atmosfäriska störningar, och anta att Jupiter och Jorden ligger som närmast.

# Kapitel 5

## Banmekanik

### 1 Newtons insatser till den moderna banmekaniken

Sir Isaac Newton, den engelska matematikern, fysikern, och vetenskapsmannen som levde under mitten av 1600 till tidiga 1700 talet. Hans fundamentala lagar och insatser till den ständiga utveckling av matematiken, där man nu reviderade Keplers idéer.

Keplers tankar som löste geometrin, saknade dynamiken, logiken; **varför** rör sig saker och ting på vår himmel?

#### 1.1 Newtons lagar

Det Newton är nog mest känd för, är hans lagar. I detta delkapitel kommer vi att gå igenom den mest använda lagen, Newtons *andra* lag:

$$F = ma \tag{5.1}$$

Kortfattat, säger lagen att något med en massa  $m$ , som accederar med  $a$  kommer att producera en kraft  $F$ . Bara med denna lag kan vi nog härleda upptill 90% av alla formler.

#### 1.2 Den Universella Gravitationslagen

Den Universella Gravitationslagen är förmodligen en av de viktigaste formler inom hela banmekaniken och astronomin. Den beskriver hur den gravitationella kraften mellan två himlakroppar förändras beroende på massorna och avståndet mellan dem. Formeln är som följande:

$$F_g = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \tag{5.2}$$

Där  $m_1$  &  $m_2$  är massorna av himlakropparna och  $r$  avståndet.  $G$  är den gravitationella konstanten,  $6.6743 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$

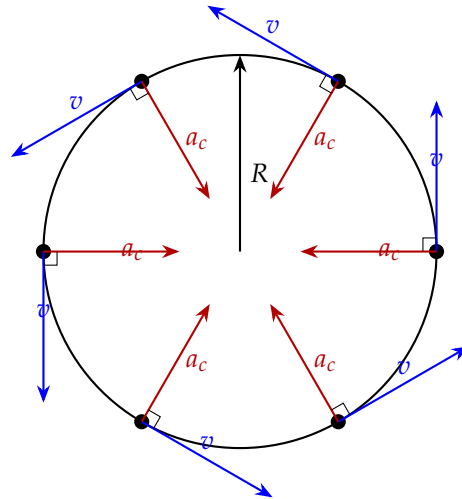
#### 1.3 Härledningen av användbara formler

##### Centripetalkraft

Centripetalkraften är den kraften något upplever när något accelererar i en centralbana. Kraften upplevs dra objektet inåt mot vad den kretsar kring och utgörs av en acceleration kallas för

**centripetal acceleration** och uttrycks med formeln

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (5.3)$$



I formeln  $F = ma$  kan du då byta ut  $a$  till  $\frac{v^2}{r}$ . Då får du formeln för centripetalkraft

$$F_c = \frac{mv^2}{r} \quad (5.4)$$

### Omloppshastighet i en cirkulär bana

Genom att relatera den universella gravitationslagen till den centripetala kan vi lösa ut för vad ett objekt kan ha för hastighet i en **cirkulär bana**, då den är konstant för alla punkter på cirkeln.

$$F_c = F_g \iff \frac{mv^2}{r} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (5.5)$$

Vi kan nu lösa för  $v$ :

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (5.6)$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (5.7)$$

## 2 Keplers lagar

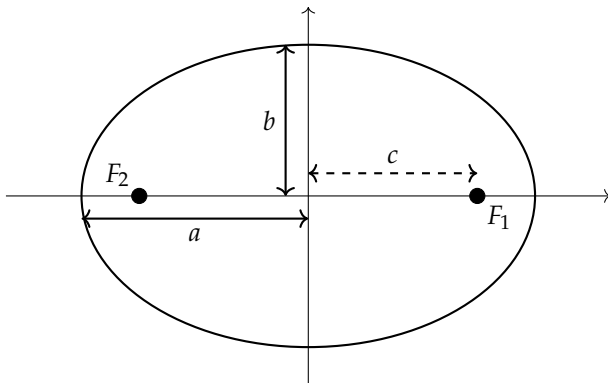
Före Newton fanns en skäggig gubbe som hette Johannes Kepler. Han tittade på planeterna och fann 3 samband som beskrev deras rörelse över himlen. Dessa reviderades sedan av Newton till att gälla allmänt för alla himlakroppar och är nu grunden till hur vi beräknar omloppsbanor.

### 2.1 Keplers första lag

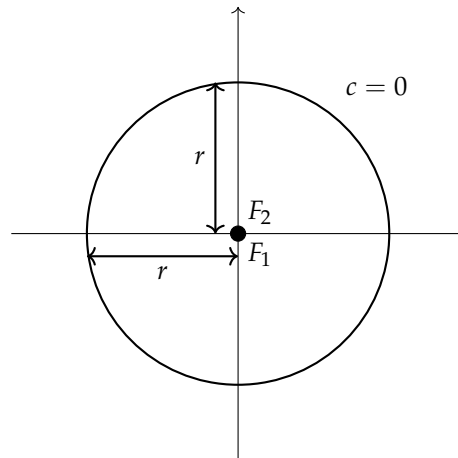
”Planetbanorna är ellipser med stjärnan i den ena brännpunkten.”  
- Wikipedia

Mer allmänt: två objekt som påverkar varandra gravitationellt kommer åka i omloppsbanor kring deras gemensamma masscentrum. Dessa banor kommer vara ellipser med masscentrumet i en av brännpunkterna. Men vad exakt är en ellips? Vad är en brännpunkt?

En **ellips** är en typ av geometrisk figur som liknar en cirkel, men har olika karaktäristiska egenskaper. Se bilden nedan:

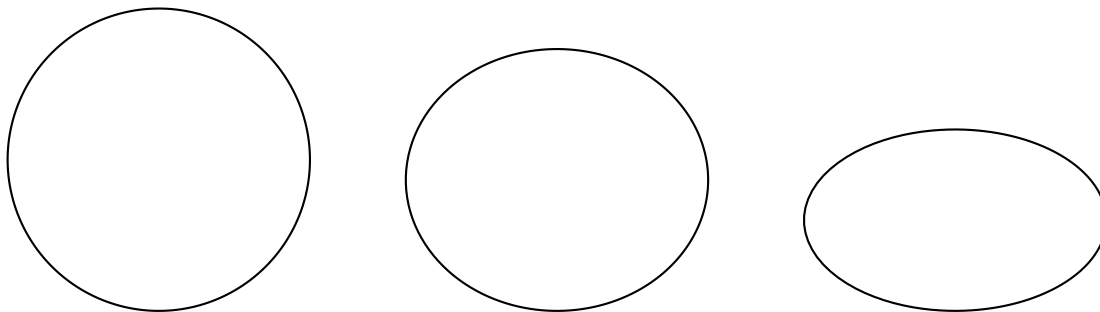


(a) hur brännpunkter och axlar ser ut i en ellips. Den mest användbara att komma ihåg är halva storaxeln  $a$  (semimajor axis).



(b) En vanlig cirkel med radie  $r$

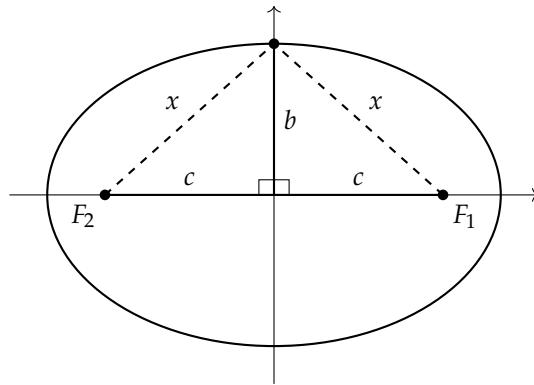
Som tidigare sagts ser en ellips nästan likadan som en cirkeln, fast lite mer utdragen. Hur mycket en ellips är utdragen med, kan uttryckas med något som kallas för **excentricitet**  $e$ . Excentricitet kan beskrivas som relationen mellan avståndet från en brännpunkt, genom hela avståndet från mitten till kanten av ellipsen. En cirkel, som också har excentricitet, är därför också en typ av ellips som inte har någon typ av "utdragning" eftersom att avståndet från brännpunkterna till mitten, är 0 och därför har ett excentricitet på 0. Se figurerna nedan.



(a) En ellips med excentricitet 0 (en vanlig cirkel) (b) En ellips med excentricitet 0.5 (c) En ellips med excentricitet 0.8

Men när vi väl drar ut cirkeln, ändras något. En cirkels karaktäristiska egenskap är att det alltid är ett avstånd  $r$  från mitten. Men när cirkeln dras ut, ändras längderna. Bredden blir längre och höjden kortare. Ellipsens olika längder kan därför beskrivas som sådan:  $a$ ,  $b$  och  $c$ , där  $a$  &  $b$  är ellipsens bredd och höjd, och  $c$  avståndet från mitten till brännpunkten. Men hur kan vi uttrycka  $c$  i form av  $a$  och  $b$ ?

Vi börjar med att rita ut en punkt på våran ellips:

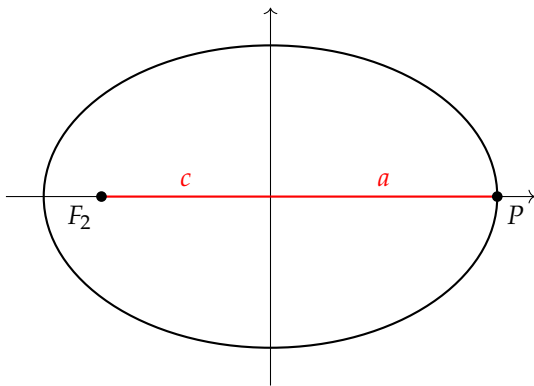


**Figur 5.3:** En triangel med bas  $c$  och höjd  $b$ .

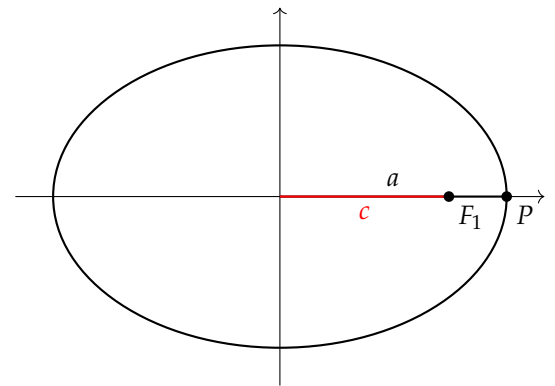
Låt  $c$  vara avståndet från mitten av ellipsen till brännpunkten, och  $b$  vara höjden av våran ellips. Då genom *Pytagoras sats* får vi en hypotenus  $x$ . Vi kan då uttrycka  $x$  som sådan:

$$x^2 = c^2 + b^2 \iff x = \sqrt{c^2 + b^2} \quad (5.8)$$

Nu har vi en punkt från  $F_1$  och  $F_2$  på ellipsen uttryckt i  $c$  och  $b$ . Men vi saknar fortfarande ett uttryck från brännpunkterna för  $a$ . Vi använder oss av faktumet att en cirkel är en speciell typ av ellips, där brännpunkterna är på samma punkt. Eftersom att avståndet från mitten av cirkeln till kanten alltid är  $r$ , måste summan av avståndet från en punkt på en ellips när brännpunkterna säras också ge avståndet till kanten.



**(a)** Avståndet från  $F_2$  till kanten av ellipsen)



**(b)** Avståndet från  $F_1$  till kanten av ellipsen

Om distansen från båda brännpunkterna till punkten i figur 5.3 kan beskrivas som  $2x$  och distansen från  $F_2$  och  $F_1$  i figur 5.4a och 5.4b som  $(a + c) + (a - c)$  kan vi nu ställa upp denna ekvation:

$$2x = (a + c) + (a - c) \longrightarrow 2x = a + a \cancel{- c} \quad (5.9)$$

Som ger våran fullständiga ekvation:

$$2x = 2a, \quad a^2 = c^2 + b^2 \iff \boxed{c^2 = a^2 - b^2} \quad (5.10)$$

Eftersom att excentricitet  $e$  uttrycks som  $\frac{c}{a}$ , kan vi skriva om den till:

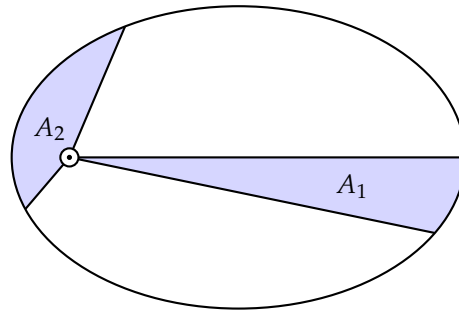
$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (5.11)$$

Utifrån denna definition kan vi finna uttryck för objektets närmaste (**periapsis**) och avlägsnaste (**apoapsis**) punkt till masscentrumet enligt

$$r_a = a(1 + e), \quad r_p = a(1 - e). \quad (5.12)$$

## 2.2 Keplers andra lag

Keplers andra lag används lite mer sällan men kommer från att rörelsemängdsmomentet (rörelsemängd för rotation) måste vara konstant. Detta gör att ett objekt i en omloppsbanan kommer svepa lika stora area under en fast tid oavsett var i banan den börjar.



**Figur 5.5:** Areorna som sveps kommer vara lika stora om tiden är lika stor,  $A_1 = A_2$ .

Vi kan då skriva proportionaliteten som:

$$A \propto t \iff A = kt, \quad k = \text{some constant} \quad (5.13)$$

## Överkurs

Eftersom att vi har nämnt att rörelsemängdsmomentets ( $L = mvr$ ) bevarande är sant för alla fall där en area sveps med en tid (och justeras med en konstant  $k$ ) kan vi skriva olika moment som sådan:

$$L_1 = L_2 \implies m_1 v_1 r_1 = m_2 v_2 r_2 \quad (5.14)$$

Massorna tar ut varandra, då de är oförändrade. Men hastigheterna och avstånden ändras beroende på position på ellipsen.

## 2.3 Keplers tredje lag

Antagligen den mest användbara av de 3 lagarna och en som är bra att kunna utantill. Den kommer från centralrörelse i mekaniken och ser ut såhär

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \quad (5.15)$$

Men ni kan också ha sett uttrycket som sådant

$$T_{jordr}^2 = a_{au}^3 \quad (5.16)$$

eller

$$T^2 \propto a^3 \quad (5.17)$$

där  $T$ , (inte  $T_{jordr}$ ) är omloppstiden i sekunder,  $a$  halva storaxeln i meter och  $m_1, m_2$  massorna i kg. Men vart kommer formeln ifrån? Till skillnad från keplers första, och andra lag kan man rätt så enkelt härleda den tredje.

Notera att tid  $T$  kan uttryckas som  $\frac{s}{v}$ , där  $s$  är sträckan och  $v$  hastigheten. Om vi antar en cirkulär bana kan vi skriva om  $s = 2\pi r$  och  $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ . Vi får då:

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{GM/r}} \iff T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} \quad (5.18)$$

Om vi då kvadrerar båda sidorna, får vi får slutliga formel

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3} \quad (5.19)$$

Där  $T$  är i **sekunder**,  $r$  i meter och  $M$  i kilogram.

Några varianter av formeln finns:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3, \quad a = \text{semi major axis} \quad (5.20)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3, \quad m_1 \ \& \ m_2 = \text{massor av liknande kroppar} \quad (5.21)$$

Men vart får vi då relationen?

$$T_{jordr}^2 = a_{au}^3$$

Kepler påstod att alla omloppsbanor är på något sätt relaterade till dess avstånd från himlakroppen. Och att detta gällde för *alla system*. Alltså kan vi skriva uttrycket som en proportionalitet mellan avståndet, och omloppstiden.

$$T^2 \propto a^3 \iff T^2 = a^3 \cdot k \iff \frac{T^2}{a^3} = k, \quad k = \text{some OTHER constant} \quad (5.22)$$

Om vi då använder denna relation för att beskriva tiden proportionellt med avståndet för jorden, får vi:

$$T_{\oplus}^2 = a_{\oplus}^3 \cdot k \iff \frac{T_{\oplus}^2}{a_{\oplus}^3} = k \quad (5.23)$$

Eftersom att  $k$  konstanten är lika för alla system kan vi ställa upp en ekvation. Om jordens proportionalitet ska ha en konstant lika med vilket annat system med samma kvot:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_{\oplus}^2}{a_{\oplus}^3} \iff \frac{T^2}{T_{\oplus}^2} = \frac{a^3}{a_{\oplus}^3} \quad (5.24)$$

**Notera!**  $a_{\oplus}$  &  $T_{\oplus}$  kan skrivas som deras jordenheter, alltså *1 Astronomisk enhet och 1 jordår*. Vår ekvation blir då:

$$\frac{T^2}{1 \text{ jordår}} = \frac{a^3}{1 \text{ AU}} \implies \boxed{T_{\text{jordår}}^2 = a_{\text{au}}^3} \quad (5.25)$$

Däremot funkar denna formel enbart för stjärnor med  $1 M_{\odot}$ . Varför då? Jo eftersom att hastigheten

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

inhåller en massa. Den massan är lika med 1 när vi mäter solmassor i just vårt system. Om stjärnan är större än 1 måste vi skriva om formeln:

$$\boxed{T_{\text{yr}}^2 = \frac{a_{\text{au}}^3}{M_{\odot}}} \quad (5.26)$$

### 3 Uppgifter

- 5.1** Om två identiska binära stjärnor är i en cirkulär omloppsbanan kring varandra, vart ligger då masscentrumet om avståndet från bägge är 5 AU? Svara i km
- 5.2** ISS ligger i omloppsbanan LEO, cirka 400 km från Jordens yta.  
 a) Bestäm omloppshastigheten av ISS om banan är cirkulär  
 b) Vad är omloppstiden?  
 c) Om ISS var 2...3...4x längre bort, hur mycket ökar tiden med? Kan du se en relation?
- 5.3** I många ideala system, antas jorden inte dra på solen. Men detta stämmer inte. Det leder till att jordens bana är lite elliptisk. När jorden är som närmast ligger den 147.1 miljoner km bort från solen, vilket är cirka 3.28% närmare än dess apoapsis. Bestäm excentriciteten av omloppsbanan.
- 5.4** Två par, djupt förälskade väger 60kg var. Hur stark kommer deras attraktion vara om de befinner sig 1 meter från varandra?
- 5.5** I formeln  $T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} \cdot a^3$  har vi två massor istället för en. Förklara skillnaden mellan  $\frac{4\pi^2}{GM} a^3$  och  $\frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} a^3$
- 5.6** Ett år på exoplaneten WASP-33b varar 1,22 dagar. Planeten har 2,81 jupitermassor och dess stjärna, WASP-33, har 1,50 solmassor. Hur långt är avståndet mellan stjärnan och dess planet om vi antar att omloppsbanan är cirkulär?
- 5.7** En rymdfarkost i omloppsbanan kring Jupiter har bestämt peripasis till att vara 420 000 km från Jupiter och apoapsis att vara 660 000 km a) Hur lång tid tar det för farkosten att åka ett varv?  
 b) Vad är banans excentricitet?
- 5.8** Tidsvatten är ett fenomen som uppstår på grund av månens gravitationella påverkan på jordens hav. Beräkna med vilken kraft månen drar på jordens yta. (Hint: Hur kan du förklara hur kraften som dras på ytan av planeten, och inte hela? Om  $M_{\text{hav}} \ll M_{\text{månen}} \implies g_{\text{acceleration}} = \frac{GM_{\text{månen}}}{\Delta r^2}$ )
- 5.9** Stjärnan S2 har observerats ha en udda omloppsbanan kring ett svarthål vid vintergatans mitt. Periodtiden för omloppsbanan är 16,1 år och den halva storaxeln är 970 AU.
- 5.10** Astronomer har kommit fram till att stjärnan FA-2025 har 0,77 solmassor, en radie som är 0,75 solradier samt en planet i omloppsbanan. Denna planeten, FA-2025 b, korsar lyckligtvis rakt emellan oss och sin stjärna så att ljuset fördunklas varje 34,6 dagar.  
 a) Hur långt är avståndet mellan planeten

och stjärnan? Anta att omloppsbanan är cirkulär.

Mer exakta mätningar av FA-2025 b har gjorts med två metoder. Först har man kollat på hur mycket av ljuset som försvunnit då planeten passerar framför och kommit fram till att det är 1,45 %. Sedan har man kollat på ljusspektra från stjärnan och sett att ljuset rödskiftats med samma periodtid. Detta skiftet motsvarar som mest en hastighet av 1,47 km/s i vår riktning. Systemet anses också vara cirkulärt, men stjärnan vagnar lite fram och tillbaka. Astronomerna använder sig av en modifierad formel för mass-centrum  $M_p a = M_* r_*$ .

b) Bestäm storleken av FA-2025 b (använd formeln  $\frac{\Delta F}{F} = \left(\frac{R_{planet}}{R_*}\right)^2$ ).

c) Bestäm planetens densitet. (Hint:  $v_* = \frac{2\pi r_*}{T}$ )

d) Bestäm ytgravitationen ( $g = \frac{F_g}{m}$ ).

**5.11 AOjr 25 Finalprov** : En okänd rymdfarkost har gått in i omloppsbanan runt jorden. Vid kommunikation med farkosten observe-

rades att signalens restid (enkel väg) varierade mellan som kortast 1 sekund och som längst 4 sekunder. Anta att signalen färdas med ljusets hastighet i vakuum.

a) Beräkna längden på *halva storaxeln* ( $a$ ) och *excentriciteten* ( $e$ ) för farkostens elliptiska bana.

b) Bestäm *omloppstiden* ( $T$ ) för farkosten kring jorden.

**5.12 AOjr 24 Finalprov** : Utomjordingarna på Plutos norra halvklot har just kommit på midsommar, och startar en tradition för att fira dagen. Midsommar på Plutos norra halvklot infaller när himlakroppen är på en specifik plats i sin bana runt solen. Hur ofta firar utomjordingarna midsommar?

**5.13 IOAjr 2024 Grekland** : En neutronstjärna är en snabbt roterande kompakt stjärna. En viss neutronstjärna har en massa på  $1,40 M_\odot$  och dess radie är 10,0 km. Vad är den kortaste möjliga rotationsperioden för neutronstjärnan, innan den börjar kasta ut sin massa?

# Kapitel 6

## Astrofysik

Astrofysiken är studien av hur stjärnor fungerar, både som enskilda system och som delar av större system.

### 1 Kärnfysik

Som ni vet kommer ljuset som en stjärna emitterar från början från fusionsprocesser i stjärnans kärna. För att förstå stjärnor måste vi därför först börja med kärnfysik. 1905 publicerade Einstein sin teori om speciell relativitet för att förklara varför ljusets hastighet var konstant. En effekt av denna teori är att han lyckades beskriva materia som en typ av energi av storleken

$$E = mc^2, \quad (6.1)$$

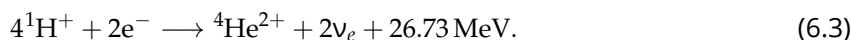
där  $c$  är ljusets hastighet i vakuum. Eftersom ljuset är väldigt snabbt innehåller varje bit materia en enorm mängd energi som kan frigöras i kärnprocesser. Massan av en atomkärna bestäms inte enbart av den totala massan av neutroner och protoner som ingår i den utan påverkas även av den energi som binder samman partiklarna. Denna **bindningsenergi** sänker den totala massan med en liten mängd, alltså är det energimässigt mer effektivt för partiklarna att vara bundna i en atomkärna än att vara fria. För att dela atomkärnan krävs det att denna bindningsenergi tillförs. Alltså är kärnor med högre bindningsenergi både lättare och stabilare. Stabiliteten av atomkärnor som en funktion av deras atomnummer visas i 6.1. Om vi genom stora tryck slår samman kärnor till vänster i diagrammet kommer den totala massan att minska och den resulterande energiskillnaden kommer emitteras bland annat som en foton. Energin av en foton ges av

$$E = hf, \quad (6.2)$$

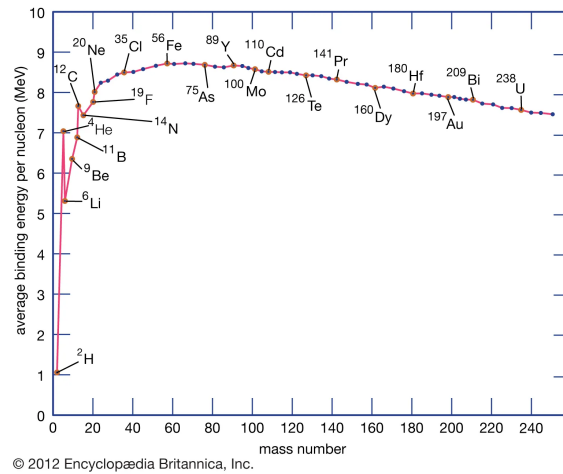
där  $h$  är Plancks konstant och  $f$  är ljusets frekvens. För tyngre ämnen slutar stabiliteten att öka och vi förlorar istället energi på att slå samman dessa kärnor.

#### 1.1 Fusionsprocesser

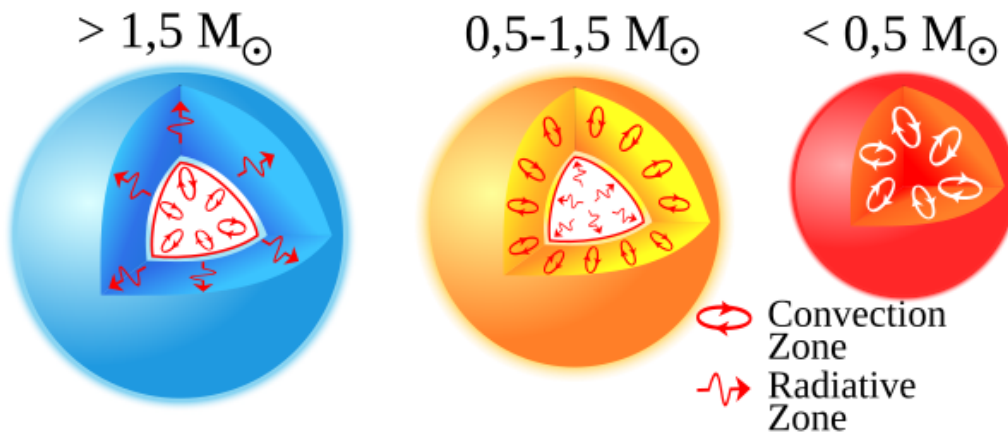
Den faktiska processen i fusion kan ske på fler olika sätt beroende på omständigheterna. Den så kallade **proton-proton kedjan** är den som pågår i vår sol och de flesta stjärnor vi ser på himlen. I den kombineras väte till helium enligt



Denna process är prevalent när temperaturer är (relativt) låga. Vid högre temperaturer blir **CNO-cykeln** viktigare. Stjärnor med massor över  $1,5M_{\odot}$  kan antas bedriva CNO-cykeln. Cykeln har



**Figur 6.1:** Stabiliteten av atomkärnor som en funktion av deras atomnummer. [3]



**Figur 6.2:** En beskrivning av de olika lagren i stjärnor av olika massor. [10]

olika former beroende på katalyserande ämnen som finns tillgängliga, men den totala ekvationen är till slut identisk med proton-proton kedjan och ger samma resultat.

**Trippel-alfa processen** använder helium för att skapa kol och tyngre ämnen. Processen följer



där eV är en enhet för energi. Denna energi frigörs som strålning. I processen kombineras ofta kolet med ännu fler alfapartiklar och skapar på så sätt tyngre ämnen såsom syre. Trippel-alfa-processen aktiveras när temperaturen är mycket hög och det finns en stor koncentration av helium, alltså mot slutet av stjärnors liv.

Energien som driver stjärnorna skapas enbart i deras kärnor där trycket och temperaturen är tillräckligt hög för att fusion ska ske. De yttre lagren av stjärnorna har betydligt lägre densitet och tryck och beter sig därför annorlunda, fastän det fortfarande är plasma. Nära kärnan är plasmat relativt genomskinligt och kommer på så sätt tillåta ljuset och värmen att stråla fritt igenom, den så kallade **radiativa zonen**. Längre ut ökar opaciteten, och ljuset absorberas nu av plasmat. Värmeenergin överförs nu genom strömningar i materien. Man kan säga att hela

den delen kokar som en grötgryta. Detta kallas för den **konvektiva zonen**. När densiteten av materien har minskat så mycket att den återigen blir genomskinlig har vi nått stjärnans "yta" och ljuset kommer nu att emitteras igen som strålning ut i rymden.

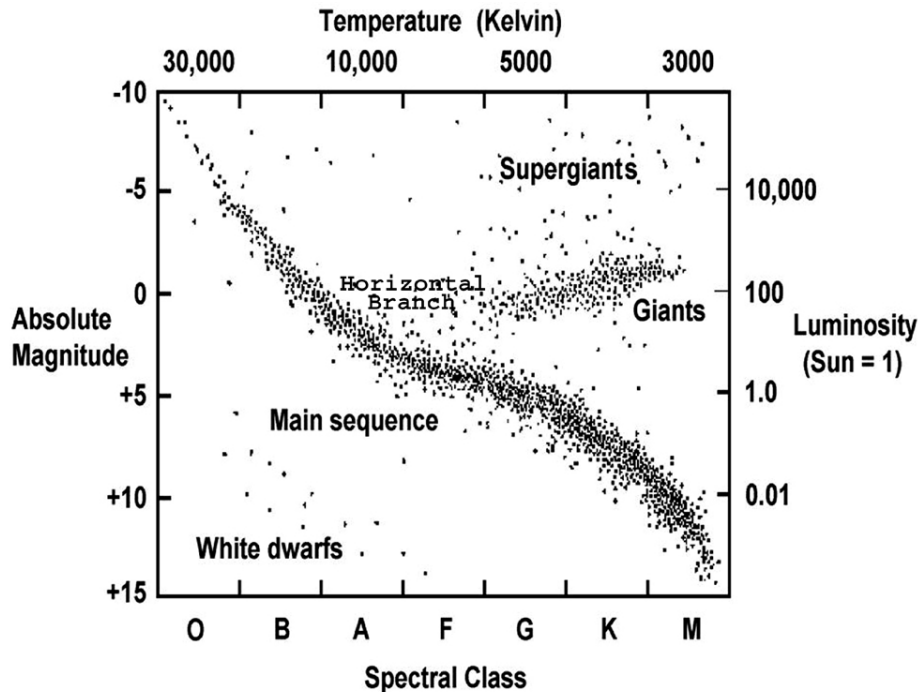
Storleken av stjärnan bestäms av **strålningstrycket**, alltså det tryck all denna värme utövar på atmosfären. Tätare stjärnor har varmare fusion och skapar därför ett större tryck som trycker bort de yttre lagren. Detta når sin balans när strålningstrycket är lika med gravitationen. Detta kallas för **hydrostatisk jämvikt**.

## 2 Stjärnevolution

Stjärnor föds i stora vätemoln som kallas för **nebulosor**. Förtätningar i molnet kommer över tid kollapsa samtidigt som temperaturen och densiteten ökar. När temperaturen ökat tillräckligt för fusion kommer stjärnan genomgå ett tidigt instabilt stadium som kallas för **protostjärna**. Under denna tid kommer all kvarvarande gas ansamlas i en skiva runt stjärnan där planeter och även andra stjärnor kan skapas.

### 2.1 Huvudserien

Över kort tid kommer protostjärnan att bli stabil i proton-proton kedjan eller CNO-cykeln. Detta stadiet kallar vi **huvudserien** och det är här majoriteten av stjärnans liv spenderas. Om man logaritmiskt plottar stjärnors temperatur mot luminositet i ett s.k. **HR-diagram** (visat i figur 6.3) kommer man se att alla huvudseriestjärnor ligger på en svagt böjd kurva genom diagrammet. Detta sker på grund av hydrostatisk jämvikt. På huvudserien kan man visa att det finns en relation



Figur 6.3: Ett typiskt HR-diagram. [1]

mellan stjärnornas luminositeter och massor. Alltså bestämmer massan av den ursprungliga

nebulosan helt var på huvudserien stjärnan hamnar. Denna relation är

$$L \propto M^{3,5}. \quad (6.5)$$

Värdet av potensen varierar mellan 3 och 4 beroende på litteratur, vi använder oss av 3,5.

## 2.2 Ålderdom

Då vätet i stjärnans kärna tar slut kommer trippel-alfa processen ta över fusionen och stjärnan kommer expandera kraftigt. Dessa stjärnor kallar vi för **röda jättar** då de är både kalla och ljusstarka, därav har de stor radie. När heliumet tar slut kommer fusionen fortsätta med tyngre och tyngre ämnen vilket ger snabbare och snabbare fusion tills antingen stjärnan slits sönder eller järn skapas i kärnan.

## 2.3 Död

För stjärnor med låg massa ( $M < 1,5M_{\odot}$ ) kommer stjärnans yttre lager slitas sönder i slutet medan kärnan kommer förbli intakt. De yttre lagren kommer då skapa en **planetarisk nebulosa** medan kärnan skapar en **vit dvärg**. De vita dvärgarna hålls uppe av trycket från kvantfysiska fenomen där elektroner inte får inneha samma energinivåer.

Om en vit dvärgstjärna ansamlar massa från en systerstjärna i samma par och på så sätt överstiger den s.k. **Chandrasekhargränsen** på  $1,4M_{\odot}$  kommer stjärnan att kollapsa i en stor explosion som kallas **Supernova typ Ia**. Den absoluta magnituden av denna supernova är alltid  $M_{bol.} = -19,3$ . Supernovor av denna typ går att upptäcka och studeras ofta för att finna kosmiska avstånd. Supernovor av denna typ lämnar inga rester.

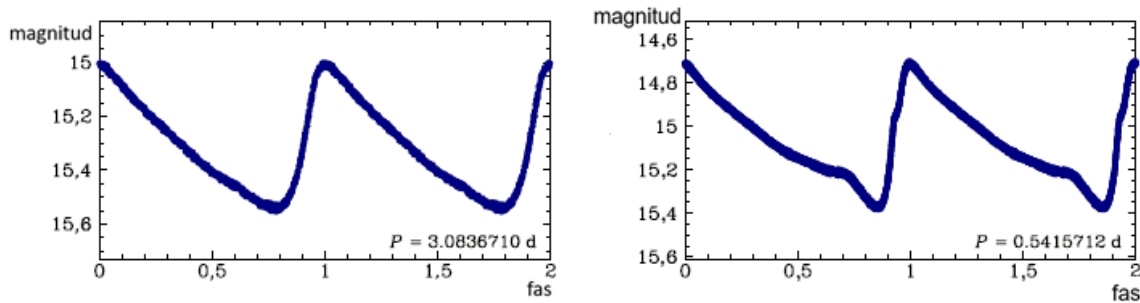
Om en stjärna tyngre än  $1,5M_{\odot}$  dör kommer en typ Ib, Ic eller II supernova att inträffa. Resten av en sådan supernova kommer vara en neutronstjärna eller ett svart hål. I en neutronstjärna har alla elektroner kombinerats med alla protoner för att skapa neutroner. Detta innebär att det som upprätthåller en neutronstjärna är den starka kärnkraften. I svarta hål finns inga upprätthållande krafter utan all massa tros vara i en enda punkt.

## 3 Variabla stjärnor

På vissa delar av HR-diagrammet når aldrig stjärnorna jämvikt mellan stråltryck och gravitation. Istället kommer stjärnan bete sig likt en oscillator och expandera och kontrahera med tid i en typ av svängning. Denna svängning drivs av de yttre lagrens varierande absorption av strålning med förändrande tryck och innebär att svängningen kommer behålla sin styrka medan den i de flesta stjärnor förlorar styrka till friktion. Denna typen av stjärnor kallas för **variabler**.

Det finns flera typer av variabler, alla med en unik underbyggande fysik. Vi kommer inte prata om alla av dem utan ett par som har visat sig centrala för astronomin. Dessa är **Cepheid**-variablerna och **RR-Lyrae**-stjärnorna. Dessa två typer har oscillationskurvor som går att känna igen väldigt enkelt och kan därför karaktäriseras på långa avstånd. Dessa kurvor går att se i figur 6.4. Anledningen till att vi fokuserar på dessa två typer av variabla stjärnor är att man i början av 1900-talet fann sätt att bestämma deras luminositeter utifrån deras perioder. För RR-Lyrae stjärnor gäller att alla stjärnor har ungefär samma luminositet (skiljer sig mellan modeller, men accepterat är  $M = 0,6 \pm 0,2$ ) medan för Cepheider kan vi visa att följande empiriska formel gäller

$$M = -2,78(\lg(P) - 1) - 4,00, \quad (6.6)$$



**Figur 6.4:** Flux-graf av en Cepheid-variabel (V) och en RR-Lyrae stjärna (H). [8]

där  $M$  är den absoluta magnituden och  $P$  är perioden hos oscillationerna i dygn. Eftersom perioden hos en variabel stjärna är mycket enkel att observera kan vi med detta förhållande beräkna absoluta magnituder av stjärnor mycket längre bort än vad man kunde göra parallaxmätningar. Detta förhållande (kallat **Leavitt's lag**) användes för att första gången mäta avstånden till andra galaxer.

## 4 Binära system

Stjärnor föds oftast i grupp. När det finns mycket gas att tillgå klumpas den i flera klumpar. Ofta föds stjärnor så nära att de blir gravitationellt bundna i samma system. Binära stjärnsystem kan upptäckas på många olika sätt och klassificeras därefter. Följande är de vanligaste:

1. **Visuella:** De två stjärnorna går att skiljas åt med en vinkel däremellan.
2. **Spektroskopiska:** De två stjärnorna rör sig i olika riktning i sina banor och delar därför upp spektrallinjer i två komponenter genom dopplereffekten. Separationen av linjerna motsvarar deras hastigheter relativt varandra.
3. **Förmörkande:** Stjärnorna täcker varandra sett från jorden vilket skapar dippar i deras sammanlagda observerade flux. Dippen i flux motsvarar fluxet av den täckta stjärnan.
4. **Astrometriska:** Endast ena stjärnan syns men kommer på grund av den andra stjärnan variera så mycket i position i sin omlopps bana att den ser ut att wobbla fram. Vinkeln den rör sig beror på storleken av dess omlopps bana kring sin kompanjon.

Stjärnor förekommer även i system av tre eller flera, men dessa är i grunden instabila då trekroppssystem är i grunden kaotiska. Den totala magnituden av två stjärnor tillsammans fås genom att addera deras flux

$$m_{tot} = -2,5 \lg \frac{F_1 + F_2}{F_0} = -2,5 \lg \frac{F_0 10^{\frac{m_1}{-2,5}} + F_0 10^{\frac{m_2}{-2,5}}}{F_0} = -2,5 \lg (10^{\frac{m_1}{-2,5}} + 10^{\frac{m_2}{-2,5}}), \quad (6.7)$$

där  $m_1, m_2$  är de två stjärnornas individuella magnituder och  $F_0$  är Vegas flux. Flerkroppssystem uppstår inte bara med stjärnor. **Exoplaneter** (planeter utanför solsystemet) är i grund och botten i flerkroppssystem med sina värdstjärnor. Exoplaneter upptäcks på så vis på liknande sätt som binära stjärnor men med större möda. En skillnad jämfört stjärnor att exoplaneters luminositet oftast är försumbar jämfört med stjärnans. Detta innebär att man oftast inte märker när en exoplanet går bakom sin värdstjärna (**secondary transit**) utan endast när planeten täcker stjärnan

(**primary transit**). Då detta händer minskar fluxet med  $\Delta F$  enligt

$$\frac{\Delta F}{F} = \left(\frac{R_p}{R_*}\right)^2, \quad (6.8)$$

där  $R_p$  och  $R_*$  är de respektive radierna för planeten och stjärnan.

## 5 Stjärnhopar

Ofta när en stjärna föds i en nebulosa skapas inte bara binära system som binds samman utan även flera separata stjärnsystem. Dessa system är inte i omloppsbanor kring varandra men är oftast svagt gravitationellt bundna och rör sig därför genom sin galax i en klump. Dessa klumpar kallas **stjärnhopar** och går att observera över hela Vintergatan. Det finns två typer av stjärnhopar, öppna och klotformiga.

**Öppna stjärnhopar** är (relativt) unga samlingar av stjärnor som lämnat/konsumerat sin nebulosa men fortfarande rör sig i klump på himlen. Dessa hopar kännetecknas av att de har låg densitet och en stor spridning av huvudseriestjärnor. Över tid sprids dessa hopar ut i galaxen då deras låga massa inte kan hålla ihop gruppen i längden. Solen har en gång varit del av en sådan hop. Dessa hopar rör sig huvudsakligen bland andra stjärnor i galaxskivan.

**Klotformiga stjärnhopar** är betydligt äldre hopar som på grund av högre massa lyckats hållas intakta över längre tid. Dessa kännetecknas av att de har större massa och högre densitet än de öppna stjärnhoparna samt att de kvarlevande stjärnorna är kallare. Dessa stjärnhopar finns inte bara i galaxskivan utan även ovanför och under galaxskivan.

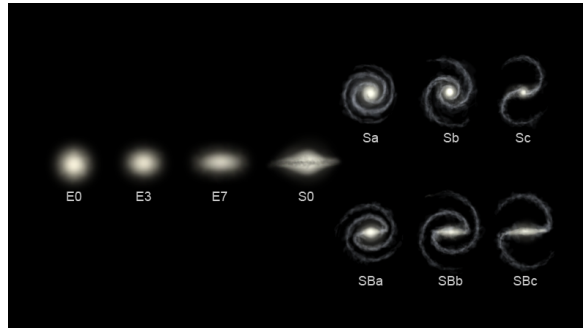
Eftersom stjärnor med olika massa har olika livslängder kommer sammansättningen av stjärnhopar utvecklas över tid. Tyngre stjärnor till vänster i huvudserien på HR-diagrammet kommer snabbare få slut på sitt väte och lämna huvudserien. För de flesta stjärnhopar finns det alltså då en punkt på huvudserien vid vilken det inte finns starkare stjärnor eftersom de lämnat för sina respektive jättefas. Denna punkt ("**Main sequence turn-off point**") gör det möjligt för oss att datera stjärnhopen. På detta sätt har man funnit både unga stjärnhopar och stjärnhopar lika gamla som Vintergatan.

Stjärnorna i en klotformig stjärnhop får med tiden mindre total rörelseenergi. Energiförlusten beror på att stjärnor slungas ut ur hopen efter nära passager med andra stjärnor. Detta är en långsam, men mätbar process som långsamt gör att klotformiga stjärnhopar ökar i densitet och slutligen når en kollaps. Slutresultatet av detta är att stjärnor smälter samman i hopens kärna. Det är så supermassiva svarta hål skapas.

## 6 Galaktisk astrofysik

En galax är en enorm samling av materia. En sådan innehåller stjärnor, gas, stoft och förmodad mörk materia, sammanbunden genom gravitation. De större galaxerna har cirka  $10^{11}$  solmassor stjärnor, mellan en och tio miljarder solmassor interstellär gas och  $10^{12}$  solmassor mörk materia. Många galaxer, kanske de flesta, inkluderar även supermassiva kompakta objekt, sannolikt svarta hål, i centrum.

Den galax vi befinner oss i är Vintergatan som är en stavspiralgalax.



**Figur 6.5:** Hubbles galaxklassifikation. [2]

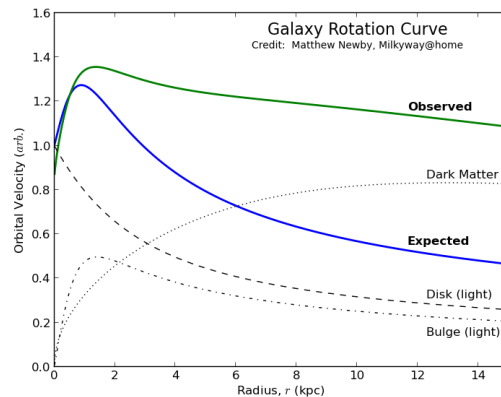
Edwin Hubble gjorde på 1930-talet ett system för klassificering av galaxer med elliptiska galaxer, linsformade galaxer, irreguljära galaxer, normala spiralgalaxer och stavspiralgalaxer. Det existerar också mellanformer och former som faller utanför dessa grupper då (om)bildning av galaxer är en fortgående process.

E är en elliptisk galax, S är en spiralgalax, SB är en stavspiralgalax, och Irr är en irreguljär galax. Siffran efter E talar om hur excentrisk galaxen är. Denna siffra är  $10 \cdot (a - b) / a$ , där  $a$  är storaxeln och  $b$  är lillaxeln så som vi ser den. Bokstaven efter S och SB är a, b eller c som står för hur tätt lindade spiralarmarna är och storleken hos centralellipsoiden. En Sa-galax har tätt lindade och svagt definierade armar och har ett relativt stort kärnparti. En Sc-galax å andra sidan har öppna väldefinierade armar och ett litet kärnparti.

## 6.1 Mörk materia

Massan av galaxer kan mätas på två olika sätt. Man kan uppskatta mängden synlig materia i galaxen genom att studera den totala luminositeten av galaxen i kombination med galaxens spektrum. Här använder vi vår tidigare relation för stjärnornas massor. Man kan också studera omloppshastigheten av stjärnor i galaxen med hjälp av dopplereffekten. Om man antar cirkulära omloppsbanor får man då ett förhållande för galaxens densitet vid olika punkter.

Den sistnämnda metoden visar en massa cirka 5 gånger större än den synliga. Den visar dess-



**Figur 6.6:** Rotationen av en typisk galax på grund av mörk materia. [7]

utom en fördelning som sträcker sig mycket längre ut från kärnan än vad den synliga materien verkar gå. Detta eftersom rotationshastigheten inte verkar avta med avståndet som förväntat utan snarare planar ut vid kånnga avstånd från galaxens centrum. Denna osynliga materia kallas **mörk materia**.

## 6.2 Tully-Fisherrelationen

Som vi tidigare såg har de flesta galaxer en tydligt definierad rotationshastighet som beror på deras storlek och massa. Denna kan man enkelt mäta för även avlägsna galaxer med dopplerröskjutning. För specifikt spiralgalaxer har man experimentellt hittat en relation mellan denna rotationshastighet och galaxens totala luminositet. Denna relation är

$$L \propto v^4. \quad (6.9)$$

Eftersom  $L$  kan användas i avståndsmodulen är detta en relation som kan användas för att hitta avståndet till galaxer långt borta. Det är dock värt att notera att felmarginalerna på denna relationen är enorma och kommer därför ofta ge orimliga svar.

## 7 Uppgifter

**6.1** Vilka typer är följande stjärnor (huvudserie, jättar, superjättar, vita dvärgar)?

- (a)  $\lambda_{\text{Max}} = 7500\text{\AA}$ ,  $L = 0,2L_{\odot}$
- (b)  $\lambda_{\text{Max}} = 1500\text{\AA}$ ,  $L = 0,1L_{\odot}$
- (c)  $\lambda_{\text{Max}} = 2900\text{\AA}$ ,  $L = 2000L_{\odot}$
- (d)  $\lambda_{\text{Max}} = 1200\text{\AA}$ ,  $L = 50L_{\odot}$

**6.2** Två stjärnor i ett kluster skiljer sig i ljusstyrka med en faktor 10. Den starkare har temperaturen 6000 K medan den svagare har temperaturen 5000 K. Vad är förhållandet mellan deras radier?

**6.3** När en viss stjärna går från att vara i huvudserien till att vara en röd jätte kommer dess temperatur att minska med en faktor 3 medan radien ökar med en faktor 100. Hur mycket ljusstarkare blir den på himlen?

**6.4** Polaris (polstjärnan) är den närmaste typ 1 Cepheiden vi hittat. Den har en period på 7,42 dagar och den apparenta magnituden 1.98, hur långt bort är den?

**6.5** Edwin Hubble observerade i början av 1900-talet Cepheidvariabeln M31-V1 i Andromeda som då ansågs vara en nebulosa. Han bestämde dess period till 31,4 dygn och använde Leavitt's lag för att beräkna avståndet till stjärnan. Hur långt

bort är Andromeda om den apparenta magnitud han observerade var 18,5? Detta var första gången mänskligheten hade bevis för att galaxer fanns utanför Vintergatan.

**6.6** Den hittills enda supernovan som har observerats i Andromedagalaxen var SN 1885A som hade den apparenta magnituden +6 (på gränsen till synlig med blotta ögat). Använd detta tillsammans med svaret i förra frågan för att avgöra om den var av typ 1a eller ej.

**6.7** En supernova (SN 2011fe) av typ 1a syntes i M101 (Vindsnurregalaxen). Supernovan hade den apparenta magnituden +9.9. Hur långt bort är M101?

**6.8** Den så kallade Eddingtonluminositeten är den största luminositeten en stjärna kan ha innan det interna trycket sliter sönder stjärnan innan jämvikt nås med dess gravitation. Följande formel kan beräknas för Eddingtonluminositeten i en vanlig stjärna:

$$L_{\text{Edd}} = 3.2 \times 10^4 \left( \frac{M}{M_{\odot}} \right) L_{\odot}$$

där  $M$  är stjärnans massa. Genom denna formel, vad är den maximala luminositeten av en huvudseriestjärna? Alltså, vilken är huvudseriens övre gräns?

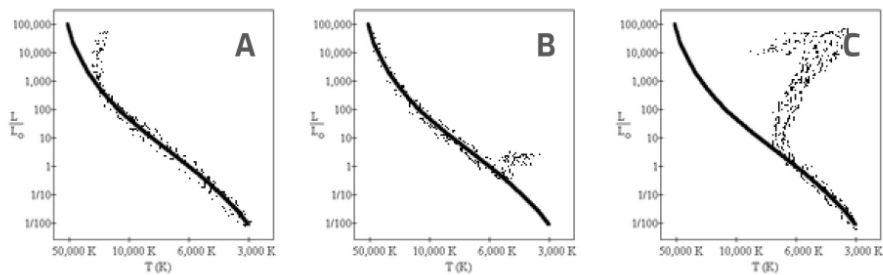
- 6.9** Livslängden av en stjärna på huvudserien beror på den tillgängliga mängden väte i kärnan och hur snabbt den konsumeras. Bestäm ett uttryck, kan vara en proportionalitet, för hur länge en huvudseriestjärna med massan  $M$  lever.
- 6.10** Stjärnor på avståndet 20 000 ljusår från en galax centrum rör sig ett varv på 300 miljoner år. Beräkna massan av den materia som finns i galaxen inom detta avstånd från galaxens centrum.
- 6.11 Stjärnornas ålderdomshem** (Final 2024)  
Nedan finns HR-diagram för 3 stjärnho-

par.

- (a) Ordna hoparna enligt ålder och motivera.
- (b) Uppskatta åldern av stjärnhop A. Till er hjälp har ni att astrofysiker funnit dessa empiriska förhållanden för huvudseriestjärnor:

$$L \sim M^{3,5}, t \sim M^{-2,5}$$

där  $L$  är stjärnans luminositet,  $M$  dess massa och  $t$  dess livstid på huvudserien. Solen kommer leva ca 10 miljarder år på huvudserien.



**Figur 6.7:** Tre stjärnhopar i olika åldrar,  $L_0$  står för solens luminositet.

# Kapitel 7

## Natthimmel

### 1 Stjärnbilder och stjärnor

Stjärnbilder är mönster och figurer som består av stjärnor. De används för att hitta olika punkter och objekt på natthimlen. Det finns totalt **88 stjärnbilder** som är officiellt erkända av **Internationella astronomiska unionen** (IAU). De flesta av dessa har sitt ursprung i grekisk mytologi och bär latinska namn.

De latinska namnen förekommer i två former: den **nominativa formen**, alltså grundformen, och den **genitiva formen**, alltså ägandeformen. Ett exempel är Orion (nominativ) och Orionis (genitiv). Av de 88 stjärnbilderna ligger 36 främst på norra halvklotet och 52 främst på södra halvklotet.

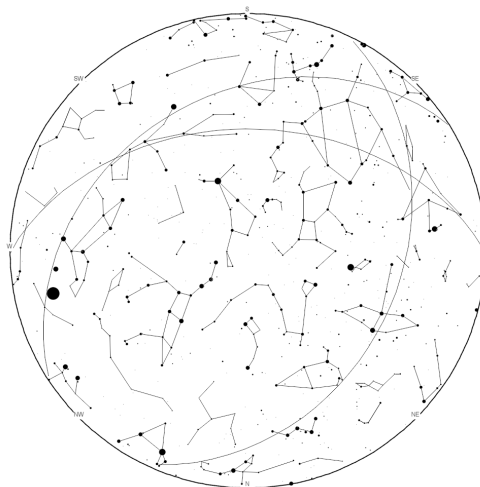
**Tänk på!** Det är inte viktigt att kunna den genitiva formen för alla stjärnbilder, men det är bra att känna igen den när du stöter på den.

### 2 Stjärnkartor

Stjärnkartor är representationer av natthimlen sedd från en viss plats vid en viss tidpunkt. Stjärnornas ljusstyrka markeras ofta genom att ljusare stjärnor ritas med större punkter. Kartorna används både för att orientera sig på himlen och för problemlösning i astronomiolympiader.

Vanligtvis placeras zenit, Z, i kartans centrum och kardinalriktningarna längs kanten, vilket motsvarar observatörens horisont. Man kan alltså tänka sig att kartans **ytterkant är horisonten runt observatören**.

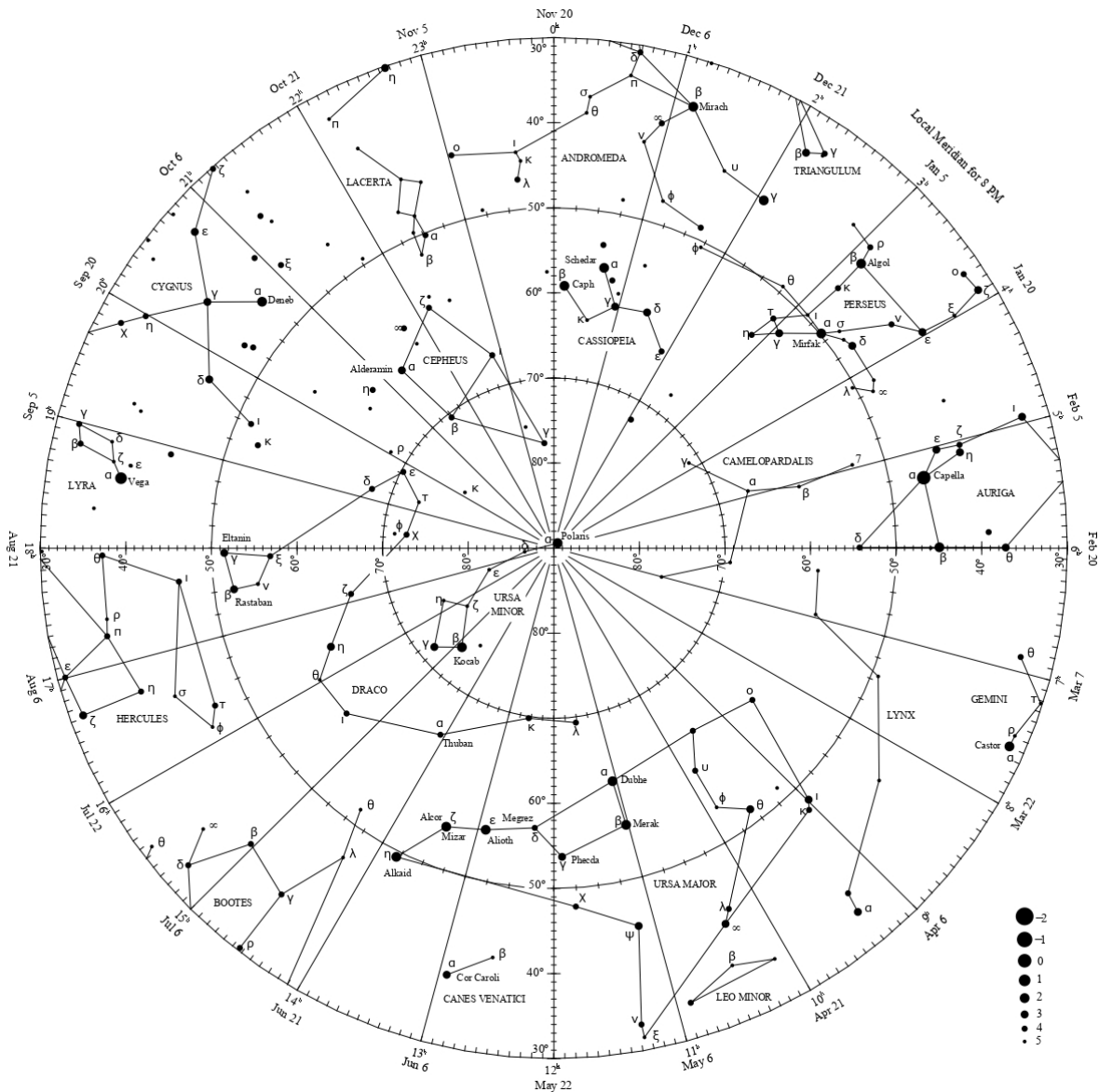
Stjärnkartor av denna typ bygger ofta på en **rund projektion** där vinklar från zenit bevaras. Det innebär att *avståndet från centrum till en punkt på kartan motsvarar objektets zenitavstånd*. Därför kan man bestämma ett objekts höjd över horisonten genom att mäta dess avstånd från zenit och sedan använda att höjden är  $90^\circ$  minus zenitavståndet.



**Figur 7.1:** En stjärnkarta tagen i Stockholm 1/6 2025 kl. 00:00.

Nedan visas en liknande karta där Polaris ligger i centrum, vilket motsvarar norra himmelspolen. En sådan vy gör det tydligt vilka stjärnbilder som är **cirkumpolära**, det vill säga aldrig går under horisonten för en observatör på norra halvklotet.

Stjärnbilder nära Polaris, såsom **Ursa Minor, Ursa Major, Cassiopeia och Cepheus**, roterar runt himmelspolen under natten men förblir alltid synliga. Dessa fungerar som viktiga **referenspunkter** när man orienterar sig på himlen.



**Figur 7.2:** Sättet stjärnbilderna ritas på här skiljer sig från det som används i Stellarium (t.ex. Herkules). Figuren därför visar att linjerna i stjärnbilder kan avbildas på flera olika sätt. **Det rekommenderas dock att du lär dig Stellariums ritningsstandard**, eftersom den är lättast att känna igen.

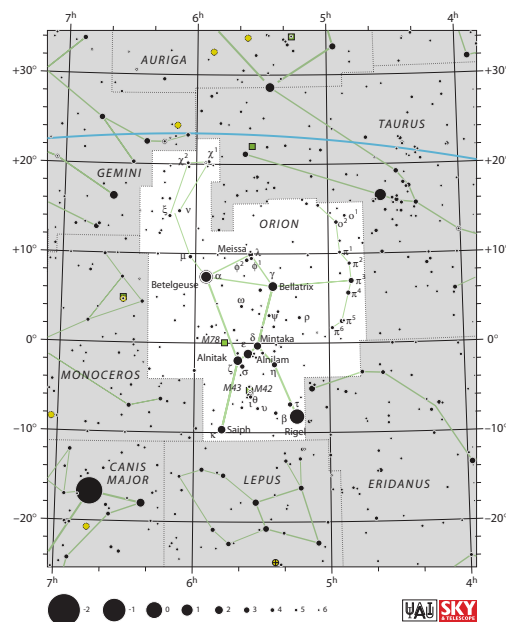
### 3 Namnsättning

För att kunna beskriva natthimlen och diskutera vad som finns där används olika regler för namngivning av astronomiska objekt.

#### 3.1 Stjärnnamngivning

IAU har delat in himlen i 88 stjärnbilder med fasta gränser, vilket innebär att varje punkt på himlen tillhör exakt en stjärnbild. De ljusaste stjärnorna ges **Bayerdesignering**, där en grekisk bokstav kombineras med stjärnbildens latinska namn i **genitiv form**. Bokstaven anger stjärnans ungefärliga ljusstyrkerang inom stjärnbilden.

Svagare stjärnor katalogiseras i omfattande kataloger, till exempel **Gaia-katalogen**.



Figur 7.3: Orions officiella IAU-mönster och gränser.

## 4 Djuprymndsobjekt

### 4.1 Kataloger

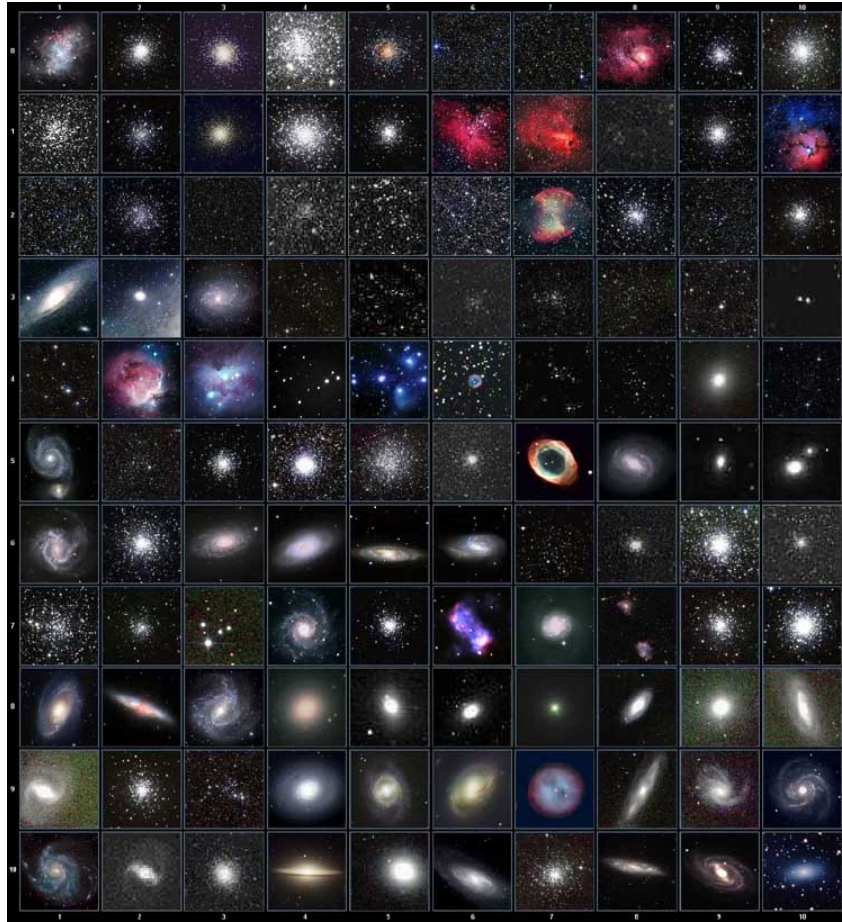
Objekt som inte är stjärnor eller planeter katalogiseras i olika kataloger, oftast med en förkortning följt av ett nummer. Dessa innehåller exempelvis nebulosor, galaxer och stjärnhopar.

Den mest kända är **Messierkatalogen (M)**, med 110 ljusstarka djuprymndsobjekt. En större katalog är **New General Catalogue (NGC)**, som innehåller 7840 objekt.

### 4.2 J2000

J2000 är ett ekvatoriskt koordinatsystem med deklination och **rektascension**. Rektascension mäts från vårdagjämningenspunkt, där ekliptikan och himmelsekvatorn korsar varandra, och är därför densamma för alla observatörer.

## 5 Messierobjekt



Figur 7.4: Bild av Messierkatalogens objekt. Källa: <https://planetfacts.org/messier-catalog/>

### 5.1 Typer av Messierobjekt

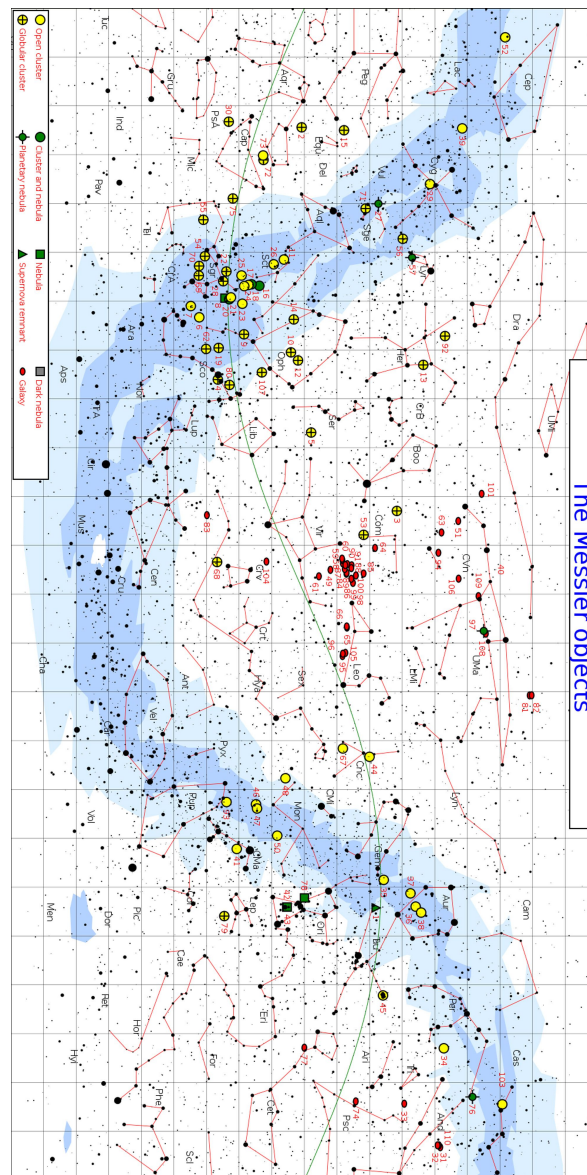
Messierobjekten kan delas in i flera olika kategorier beroende på deras fysikaliska natur:

- ★ **Öppna stjärnhopar** – löst bundna grupper av unga stjärnor (t.ex. M45).
- ★ **Globulära stjärnhopar** – tätt packade, sfäriska samlingar av gamla stjärnor (t.ex. M13).
- ★ **Spiralgalaxer** – galaxer med tydlig spiralstruktur (t.ex. M31).
- ★ **Elliptiska galaxer** – mer sfäriska galaxer utan tydlig struktur (t.ex. M87).
- ★ **Oregelbundna galaxer** – galaxer utan symmetrisk form (t.ex. M82).
- ★ **Emissionnebulosor** – gasmoln som lyser genom jonisation (t.ex. M42).
- ★ **Planetariska nebulosor** – expanderande skal från döende stjärnor (t.ex. M57).
- ★ **Supernovarester** – rester från exploderade stjärnor (t.ex. M1).

## 5.2 Exempel på Messierobjekt

- ★ **M1**, även kallad **Krabbnebulosan**, befinner sig ungefär 6500 ljusår bort, har en skenbar magnitud på 8.4 och ligger i Taurus. År 1054 observerade kinesiska astronomer en "gäststjärna" på denna plats. Det de såg var en supernovaexplosion, som senare gav upphov till Krabbnebulosan.
- ★ **M16**, även kallad **Örnnebulosan**, ligger ungefär 7000 ljusår från jorden, har en skenbar magnitud på 6.0 och ligger i Serpens. M16 består av en emissionsnebulosa och en ung öppen stjärnhop.
- ★ **M31**, även kallad **Andromedagalaxen**, ligger ungefär 2.5 miljoner ljusår från jorden och har en skenbar magnitud på 3.1. M31 är en spiralgalax i stjärnbilden Andromeda.

Hela samlingen av Messierobjekt går att hitta via NASAs resurser eller nätet.



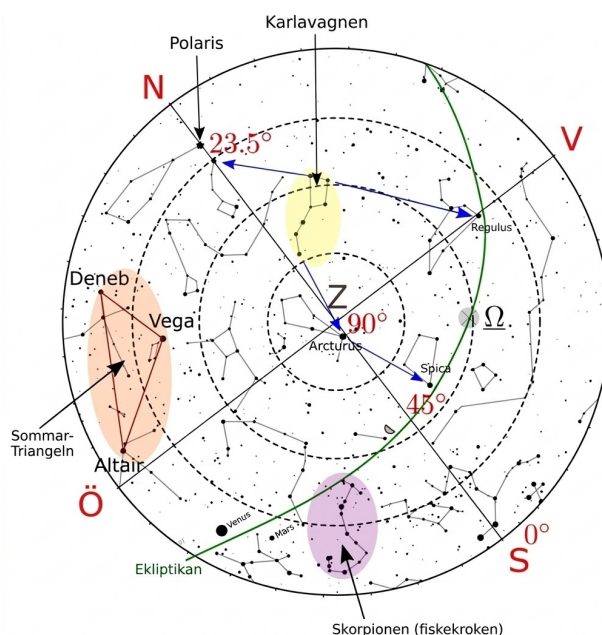
## 6 Observationsknep

### 6.1 Asterismer

Asterismer är populära, framträdande och tydliga mönster på natthimlen som inte är officiellt erkända av IAU. De är mycket användbara för att orientera sig och hitta olika objekt på himlen.

Ett klassiskt exempel är **Karlavagnen**, som är en del av Stora Björn. Den kan användas för att hitta Polaris genom att följa riktningen från dess två bakre stjärnor.

Asterismer kan också bestå av stjärnor från flera olika stjärnbilder. **Sommartriangeln** är ett sådant exempel och består av de ljusaste stjärnorna i **Lyra**, **Aquila** och **Cygnus**. Denna asterism gör det lättare att identifiera dessa stjärnbilder på sommarhimlen, då de övriga stjärnorna i dem ofta är svårare att urskilja.



Figur 7.5: Några asterismer visade i en stjärnkarta.

### 6.2 Polstjärnan

Att kunna hitta **Polaris** på en stjärnkarta och på den verkliga natthimlen är en viktig färdighet. Polaris hjälper dig att avgöra kardinalriktningarna, alltså väderstrecken norr, söder, öst och väst. För att hitta Polaris kan du använda antingen Stora Björn (Ursa Major) eller Cassiopeia.

Om du använder Ursa Major är det lättast att utgå från Karlavagnen. Dra ett tänkt streck genom de två yttersta stjärnorna i vagnens skål, Dubhe och Merak, och fortsätt det utåt. Den första ljusa stjärnan du når är Polaris.

Cassiopeia kan också användas. Stjärnbilden ser ut som ett W eller M beroende på hur den står på himlen. Genom att använda dess form kan man uppskatta riktningen mot Polaris på motsatt sida om himmelspolen från Ursa Major.

Polaris kan också användas för att uppskatta latituden för platsen där kartan är gjord. För att beräkna latituden kan man använda formeln

$$\phi = 90^\circ \times \frac{d}{R} \quad (7.1)$$

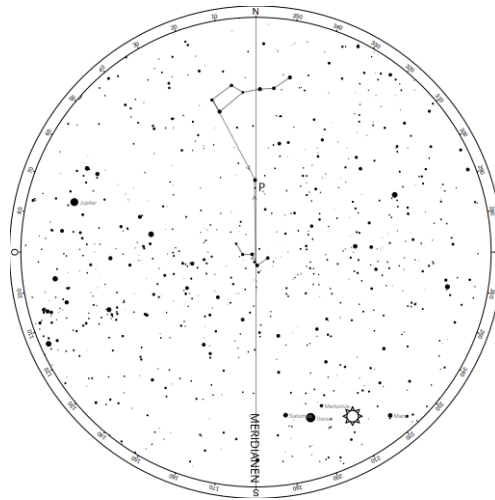
där  $\phi$  är kartans latitud i grader,  $d$  är avståndet från Polaris till närmaste kant i centimeter och  $R$  är radien för stjärnkartan i centimeter.

### 6.3 Kardinalriktningarna

Storcirkeln som går genom Polaris och mitten av kartan kallas för den **lokala meridianen**. Punkten på horisonten som ligger närmast Polaris är **norr**. Punkten rakt mittemot denna är **syd**. När norr och syd är bestämda blir de andra två kardinalriktningarna lätta att hitta.

För att hitta **öst** och **väst** på en stjärnkarta kan man föreställa sig en linje som är vinkelrät mot meridianen och går genom zenit. Den del av linjen som ligger åt vänster i förhållande till norr är öst. Den del som ligger åt höger är väst.

**Observera!** Öst ligger alltså inte till höger och väst till vänster som på vanliga jordkartor. Detta beror på att stjärnkartor används när man tittar uppåt, inte nedåt mot en karta över marken.



**Figur 7.6:** En stjärnkarta tagen i Hudiksvall 2026 kl. 15:30, med Polaris och meridianen markerade.

## 6.4 Himmelsekvatorn

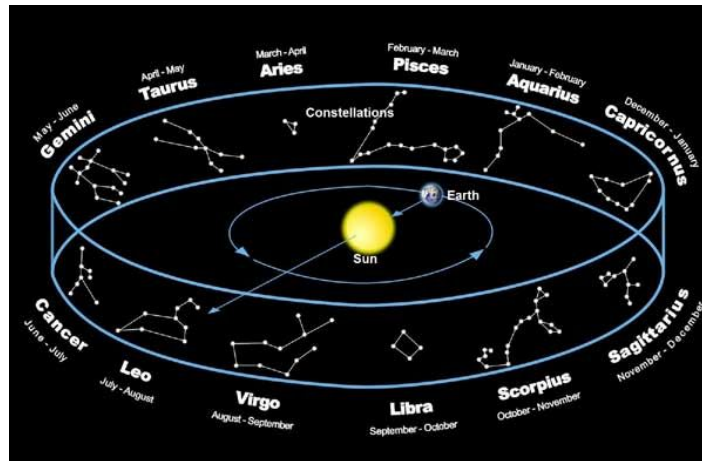
Himmelsekvatorn är projektionen av jordens ekvator på himlen. På en stjärnkarta är det den kurva som förbinder öst och väst. På de flesta kartor är den inte en rak linje. För att rita ut den kan man använda de stjärnbilder som ligger längs den. Dessa är: **Aquarius, Aquila, Canis Minor, Cetus, Eridanus, Hydra, Leo, Monoceros, Ophiuchus, Orion, Pisces, Serpens, Sextans, Taurus och Virgo.**

## 6.5 Ekliptikan

Ekliptikan är den bana på himlen som solen följer under året. För att rita ut den kan man använda de stjärnbilder som ligger längs med den. Dessa är: **Aries, Taurus, Gemini, Leo, Virgo, Libra, Scorpius, Sagittarius, Capricornus, Aquarius, Pisces och Ophiuchus.** Du kanske känner igen de tolv första som zodiakens stjärnbilder. Eftersom solen också passerar genom Ophiuchus kallas den ibland för det trettonde zodiaktecknet.

**Notera:** De nämnda stjärnbilderna är enklast att använda om man associerar dem med de månader då de är mest framträdande på natthimlen. Detta ger en intuitiv känsla för himlens rotation under året och underlättar snabb orientering vid observationer.

- |                         |                          |
|-------------------------|--------------------------|
| ★ Capricornus – Januari | ★ Cancer – Juli          |
| ★ Aquarius – Februari   | ★ Leo – Augusti          |
| ★ Pisces – Mars         | ★ Virgo – September      |
| ★ Aries – April         | ★ Libra – Oktober        |
| ★ Taurus – Maj          | ★ Scorpius – November    |
| ★ Gemini – Juni         | ★ Sagittarius – December |

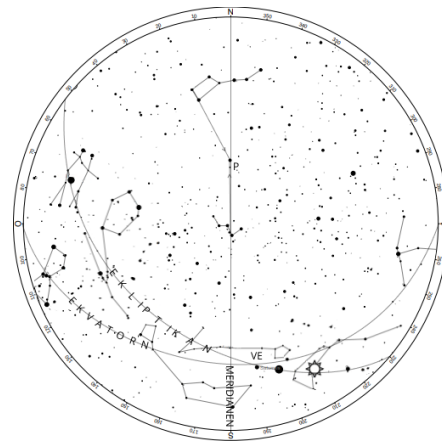


**Figur 7.7:** Stjärnbilder som ligger längs ekliptikan. Om du känner till dem blir det lättare att följa ekliptikans bana på himlen.

## 6.6 Dagjämningspunkterna

De två punkter där ekliptikan skär himmelsekvatorn kallas **vårdagjämningspunkten** respektive **höstdagjämningspunkten**. Dessa punkter markerar var solen passerar mellan den norra och södra himmelshalvan under året.

För att lokalisera dem på en stjärnkarta kan man undersöka i vilka stjärnbilder de befinner sig. Idag ligger vårdagjämningspunkten i **Pisces** och höstdagjämningspunkten i **Virgo**.



**Figur 7.8:** En stjärnkarta tagen i Hudiksvall 2026 kl. 15:30, där ekliptikan, himmelsekvatorn och vårdagjämningspunkten är markerade.

## 6.7 Galaktiska ekvatorn

Den galaktiska ekvatorn är planet som det galaktiska koordinatsystemet utgår från. De stjärnbilder som den passerar genom är: **Sagittarius, Serpens, Scutum, Aquila, Sagitta, Vulpecula, Cygnus, Cepheus, Cassiopeia, Camelopardalis, Perseus, Auriga, Taurus, Gemini, Orion, Monoceros, Canis Major, Puppis, Vela, Carina, Crux, Centaurus, Circinus, Norma, Ara, Scorpius och Ophiuchus**.

## 6.8 Galaktiska centret

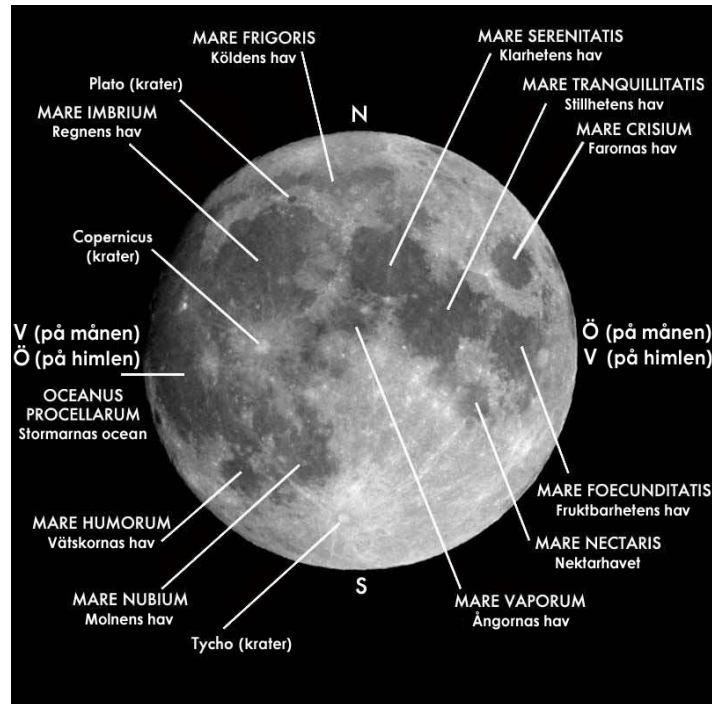
Det galaktiska centret är riktningen mot Vintergatans centrum. Det ligger i **Sagittarius** och är det område där Vintergatan framträder som ljusast.

## 6.9 Galaktiska anticientret

Det galaktiska anticientret är riktningen rakt bort från Vintergatans centrum, sett från jorden. Denna punkt ligger i **Auriga**.

## 7 Månen

Månen är jordens enda naturliga satellit. Dess utseende domineras av kratrar, maria, alltså månens "hav", och ljusare högländsområden. Precis som jorden har månen också kardinalriktningar.



Figur 7.9: En bild över månens yta och namn på olika områden. Källa: Wikipedia.

### 7.1 Månfaser

Månen syns på natthimlen eftersom dess yta reflekterar solljus. När månen rör sig runt jorden, samtidigt som jorden rör sig runt solen, förändras den del av månen som är upplyst sedd från jorden. Det är detta som ger upphov till månens olika faser.

Det finns åtta huvudfaser: **nymåne, tilltagande månskära, första kvarteret, tilltagande gibbus, fullmåne, avtagande gibbus, sista kvarteret och avtagande månskära**. De faser då den upplysta delen växer kallas tilltagande, och de faser då den minskar kallas avtagande. Tiden från en nymåne till nästa är ungefär 29.5 dagar.

Här följer en kort beskrivning av varje fas:

1. **Nymåne**, dag 0. Månen befinner sig ungefär i samma riktning som solen och är därför i praktiken osynlig. Månen ligger mellan jorden och solen. Man säger att solen och månen är i konjunktion.
2. **Tilltagande månskära**, dag 3–4. En tunn skära blir synlig på månens västra sida. Månen har rört sig österut från solen.

3. **Första kvarteret**, dag 7. Halva månens synliga skiva är upplyst. Från norra halvklotet är det den högra halvan som är ljus. Månen är ungefär 90 grader öster om solen.
4. **Tilltagande gibbus**, dag 10–11. Mer än halva månskivan är upplyst. Månen är synlig större delen av kvällen och natten.
5. **Fullmåne**, dag 14. Hela månens synliga skiva är upplyst. Månen ligger ungefär mitt emot solen på himlen. Solen och månen är då i opposition.
6. **Avtagande gibbus**, dag 18–19. Mer än halva månen är fortfarande upplyst, men den ljusa delen minskar natt för natt.
7. **Sista kvarteret**, dag 21. Halva månens synliga skiva är upplyst igen, men nu är det den vänstra halvan som är ljus från norra halvklotet sett. Månen är ungefär 90 grader väster om solen.
8. **Avtagande månskära**, dag 25–26. Endast en tunn skära återstår. Den ses bäst strax före soluppgången i öster.



Figur 7.10: Bild över månens olika faser. Källa: Wikipedia.

## 7.2 Förmörkelser

Om månen ligger mellan solen och jorden vid nymåne, och bakom jorden vid fullmåne, kan man fråga sig varför det inte sker en förmörkelse varje månad. Förklaringen är att månens bana inte ligger exakt i samma plan som jordens bana runt solen. Istället lutar månbanan med ungefär fem grader.

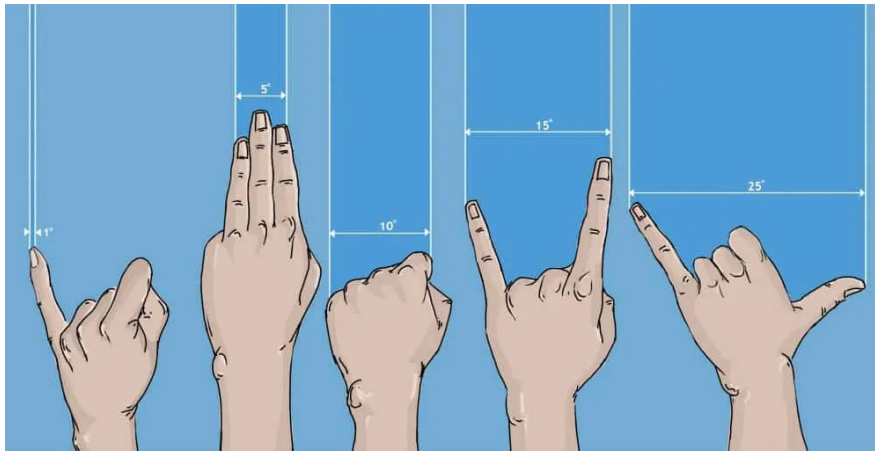
Detta gör att månen oftast passerar lite ovanför eller lite under den linje där en sol- eller månförmörkelse skulle kunna ske. För att en förmörkelse ska inträffa måste nymånen eller fullmånen ske nära en av de två punkter där månens bana skär ekliptikan. Dessa punkter kallas **månoder**. När solen befinner sig nära en månnod uppstår en period då förmörkelser är möjliga, en så kallad förmörkelsesäsong.

## 8 Vinkelavstånd

Vinkelavstånd beskriver hur långt ifrån två objekt ligger på himlen, mätt i grader. Det är ett centralt verktyg vid observationer för att uppskatta positioner och avstånd mellan stjärnor, planeter och andra objekt.

Det finns flera metoder för att bestämma vinkelavstånd, med olika noggrannhet och användningsområden:

1. **Med handen (fingermetoden).** Genom att hålla upp handen på armlängds avstånd kan man uppskatta vinklar på himlen. Till exempel motsvarar en knytnäve ungefär  $10^\circ$  och ett lillfinger ungefär  $1^\circ$ . Metoden är snabb och praktisk men relativt grov och beror på observatören.



**Figur 7.11:** Exempel på uppskattning av vinkelavstånd med handen. Källa: <https://lovethenight-sky.com/how-to-measure-angles-in-the-sky/>

2. **Med linjal på stjärnkarta.** Om en stjärnkarta har en känd skala kan man mäta avståndet mellan två objekt med en linjal och omvandla detta till grader. Metoden ger bättre noggrannhet än fingermetoden, men kräver en korrekt skala och fungerar endast på kartor, inte direkt på himlen.
3. **Med sfärisk trigonometri.** Med hjälp av koordinater, till exempel rektascension och deklination, kan vinkelavstånd beräknas exakt med formler från sfärisk trigonometri. Detta är den mest exakta metoden, men också den mest matematiskt krävande och används främst vid mer avancerade beräkningar.

## 9 Resurser

### 9.1 Stellarium eller Open Space

Stellarium är både en hemsida och en app som låter dig studera natthimlen från en specifik plats i ett format som liknar en klassisk stjärnkarta. Open Space är mjukvaran som används av Visualiseringscenter och erbjuder samma funktioner som Stellarium, men med betydligt fler avancerade visualiseringar och möjligheter.

**För att verkligen lära dig natthimlen krävs aktiv träning och många timmar av utforskning i dessa verktyg.**

**Övning:**

- ★ Öppna Stellarium och ställ in korrekt tid och plats.
- ★ Studera den övergripande placeringen av stjärnbilderna.
- ★ Roterar vyn och observera hur himlen förändras från olika perspektiv.
- ★ Titta bort från skärmen och försök återskapa himlen ur minnet.
- ★ Rita en enkel stjärnkarta eller namnge de stjärnbilder du känner igen.
- ★ Kontrollera dina svar i Stellarium och repetera det du inte kunde.

**9.2 The Sky Live**

Här kan du skapa egna stjärnkartor att träna på:

<https://theskylive.com/personalized-star-map>

**9.3 Sky Academy**

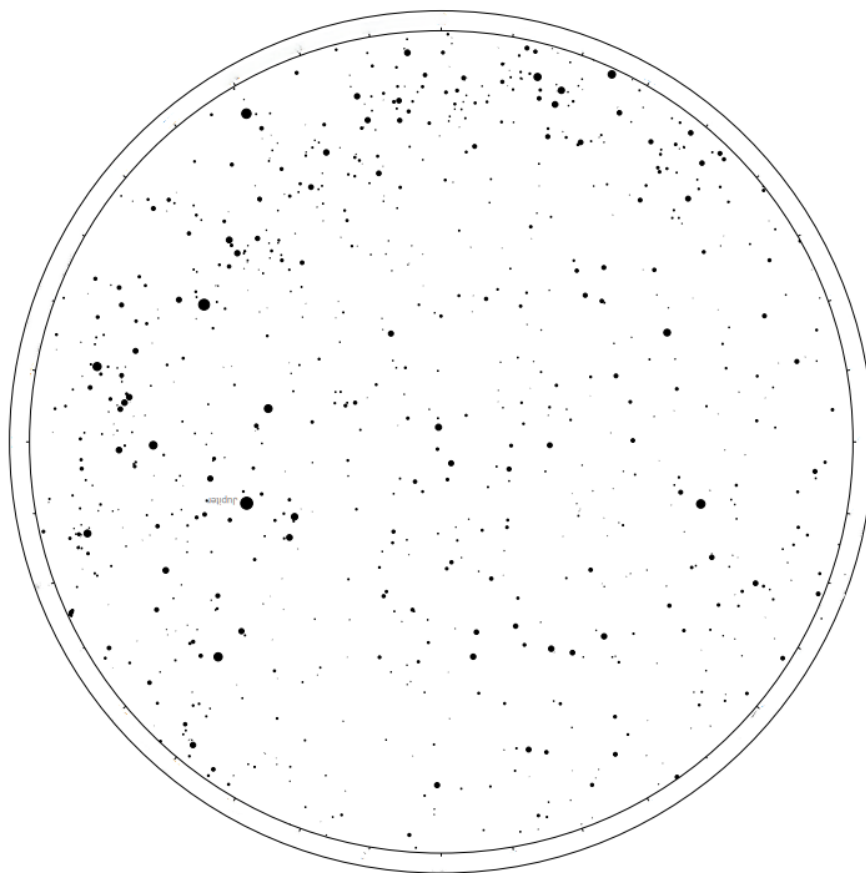
Sky Academy är en mobilapp som lämpar sig väl för att träna och testa sina kunskaper om stjärnbilder.

Den är särskilt användbar under kortare stunder när du inte aktivt studerar, till exempel under bussresor eller väntetider. Regelbunden repetition i små doser kan ge en mycket stark inlärningseffekt över tid.

## 10 Uppgifter

Lös följande uppgifter med hjälp av en stjärnkarta, exempelvis den som visas nedan:

- 7.1 Bestäm latituden för kartan.
- 7.2 Rita ut Karlavagnen på din stjärnkarta.
- 7.3 Markera ut Polaris och märk den P.
- 7.4 Rita ut kardinalriktningarna på kartan.
- 7.5 Rita ut den lokala meridianen och märk den M på din stjärnkarta.
- 7.6 Rita ut de stjärnbilder som ligger längs himmelsekvatorn och rita sedan ut ekvatorn.
- 7.7 Rita ut de stjärnbilder som ligger längs ekliptikan.
- 7.8 Rita ut alla stjärnbilder du kan identifiera på kartan och namnge dem.
- 7.9 Namnge de stjärnor du kan.
- 7.10 Rita ut den cirkumpolära cirkeln.



**Figur 7.12:** En olöst stjärnkarta från Ubon Ratchathani, Thailand.

# Kapitel 8

## Facit till uppgifter

### 1 Matematik

1.1  $x = \frac{16 - 2y^2}{3}$

1.2  $\frac{2x^3 - \frac{1}{x^2}}{2x^3} = 2y + 2 - \frac{y}{2} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2x^5} = 2y + 2 - \frac{y}{2}$   
 $2 - \frac{y}{2} \Rightarrow -\frac{1}{x^5} = 3y + 2 \Rightarrow x = \sqrt[5]{\frac{-1}{3y + 2}}$

1.3  $\frac{x^{-5} + x^{-6}}{x^{-5}} = 1 + \frac{1}{x} = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

1.4  $\frac{1}{27} - \frac{28}{7x^2} + 21 = 62 \Rightarrow \frac{1}{27} - \frac{4}{x^2} = 41 \Rightarrow x^2 < 0$ . Ingen lösning.

1.5 Halva skolan är 60 elever. Då behövs totalt  $2 + 40 = 42$  flaskor. Volymen blir  $42 \cdot 25 = 1050$  ml = 1,05 L.

1.6 (a) År 2023 fick  $0,2 \cdot 210 = 42$  elever godkänt. År 2033 blir då elevantalet  $42/0,7 = 60$ . Skolan förlorade  $210 - 60 = 150$  elever.

(b) Minskningen är 150 elever på 10 år, alltså 15 elever per år. Från 60 elever tar det  $60/15 = 4$  år till. Alltså år 2037.

(c) Om samma linjära modell gäller bakåt:  $210 + 12 \cdot 15 = 390$  elever år 2011.

1.7  $F = mg = 2 \cdot 9,82 = 19,64$  N och  $M = F \cdot L$ .  
Då blir  $L = \frac{8}{19,64} \approx 0,41$  m.

1.8  $k + f = 67$  och  $2k + 4f = 176$ . Då fås  $f = 21$  och  $k = 46$ . Alltså 46 kycklingar och 21 får.

1.9 (a)  $BD = c - 6 = 9$ ,  $DC = c + 6 = 21$  och  $AB = 15$ . I den rätta triangeln  $ABD$  blir  $AD = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12$ . Sedan är  $\tan \theta = \frac{AD}{DC} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$ , alltså  $\theta = \arctan\left(\frac{4}{7}\right) \approx 29,74^\circ \approx 0,52$  rad.

(b)  $BC = 9 + 21 = 30$ , så arean blir  $A = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{30 \cdot 12}{2} = 180$  cm<sup>2</sup>.

1.10 (a) Tre bitar à 8 m ger en liksidig triangel med sida 8 m. Arean blir  $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 8^2 = 16\sqrt{3} \approx 27,71$  m<sup>2</sup>.

(b) Fyra bitar à 6 m ger en kvadrat med area  $6^2 = 36$  m<sup>2</sup>.

(c) Med oändligt små bitar ger en cirkel störst area. Omkretsen är 24 m, alltså  $r = \frac{12}{\pi}$  och  $A = \pi r^2 = \frac{144}{\pi} \approx 45,84$  m<sup>2</sup>.

1.11 (a) Omkretsen är  $2\pi r = 28\pi$  AU  $\approx 87,96$  AU.

(b) Efter ett kvarts varv har planeten färdats  $\frac{1}{4} \cdot 28\pi = 7\pi$  AU  $\approx 21,99$  AU.

(c)  $s = r\theta \Rightarrow \theta = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$  rad  $\approx 0,86$  rad  $\approx 49,11^\circ$ .

1.12 (a) Mars:  $1,5 \cdot 12 = 18$  cm

(b) Jupiter:  $5,2 \cdot 12 = 62,4$  cm

- (c)  $\frac{5,2}{1,5} \approx 3,47$
- (d) Största avståndet blir  $12 + 19,2 \cdot 12 = 242,4$  cm
- 1.13** (a)  $300\,000 \cdot 3 = 900\,000$  km  
 (b)  $150\,000/300\,000 = 0,5$  s  
 (c)  $42 \text{ min} = 2520 \text{ s}$ , alltså  $300\,000 \cdot 2520 = 756\,000\,000$  km
- 1.14** (a)  $d = \frac{1}{0,5} = 2$  pc  
 (b)  $d = \frac{1}{0,2} = 5$  pc  
 (c) Om parallaxen halveras så fördubblas avståndet.
- 1.15** (a) Intensiteten blir 4 gånger mindre.  
 (b) Intensiteten blir 9 gånger mindre.  
 (c) A ger  $\frac{1}{4}$  av intensiteten från B.  
 (d) Avståndet måste delas med 3.
- 1.16** (a) Enligt figuren är  $BC \approx 120$  km.  
 (b)  $\tan \alpha = \frac{696969}{120} \Rightarrow \alpha \approx 89,99^\circ$ .  
 (c) Nya höjden över B blir  $696969 + 1028210 = 1725179$  km. Då mäter C avståndet  $\sqrt{1725179^2 + 120^2} \approx 1725179,00417$  km.
- 1.17** (a)  $x = 6$   
 (b)  $x = -3$   
 (c)  $x = 2^{12,32} \approx 5113,16$   
 (d)  $x = 2$   
 (e)  $22x^2 = \lg(2018) \Rightarrow x \approx \pm 0,39$   
 (f)  $x \approx 8,00$  eller  $x \approx 66,12$
- 1.18** (a)  $m_2 - m_1 = -2,5 \log(10) = -2,5$   
 (b)  $m_2 - m_1 = -2,5 \log(100) = -5$   
 (c)  $5 = -2,5 \log(I_2/I_1) \Rightarrow I_2/I_1 = 0,01$ . Stjärna 2 är alltså 100 gånger svagare.
- 1.19** (a)  $3 \log_a(x) + 2 \log_a(y)$   
 (b)  $\log_a(5) + \log_a(x) - \log_a(y)$   
 (c)  $0,25 \log_a(x)$   
 (d)  $\log\left(\frac{x^2 y}{z}\right)$   
 (e)  $\log\left(\frac{xy}{z^2}\right)$
- 1.20** (a)  $N(1) = 200 \cdot 1,5 = 300$   
 (b)  $N(3) = 200 \cdot 1,5^3 = 675$   
 (c) Faktorn är  $1,5^4 = 5,0625$   
 (d) 200 är startvärdet och 1,5 är tillväxtfaktorn per timme.
- 1.21** (a)  $m(1) = 80 \cdot 0,75 = 60$  g  
 (b)  $m(2) = 80 \cdot 0,75^2 = 45$  g  
 (c) Massan minskar med 25% per timme.
- 1.22** (a)  $v = 30^\circ$   
 (b)  $v = 270^\circ$   
 (c)  $\sin(180^\circ - v) = \sin v$   
 (d)  $\cos(-v) = \cos v$
- 1.23** (a)  $\frac{b}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\sin 30^\circ} \Rightarrow b = 6\sqrt{2} \approx 8,49$   
 (b)  $C = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$   
 (c)  $\frac{c}{\sin 105^\circ} = \frac{6}{\sin 30^\circ} \Rightarrow c = \frac{12 \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} \approx 11,59$
- 1.24** (a) Nej,  $F$  är inte linjär mot  $r$ .  
 (b) Sätt  $u = \frac{1}{r^2}$ .  
 (c) Då blir  $F = 20u$ .  
 (d) Lutningen är 20.
- 1.25** (a) Ja, punkterna ligger på en rät linje.  
 (b)  $y = 2x + 1$   
 (c)  $k = 2$  betyder att  $y$  ökar med 2 när  $x$  ökar med 1.  
 (d)  $m = 1$  är värdet då  $x = 0$ .

## 2 Astronomi

2.1 (a)  $0,5^\circ = 0,5 \times 3600'' = 1800''$

(b) se figur 2.1

(c)  $r$ , eller  $d$  som det står i vissa formler, är avståndet till stjärnan i fråga, vilket mäts i parsec och  $p$  är stjärnans parallax, som mäts i bågsekunder.

(d) 4,0 pc

(e) 13,4 ljusår

2.2 (a) 1,3 pc

(b) 24 km/s

(c) 28,6 km/s

2.3 5.2 pc

2.4 (a) Luminositet är den totala energin per sekund som en stjärna sänder ut, vilket mäts i Watt. Flux är den energi per sekund och area som når observatören, vilket mäts i  $W/m^2$  och är alltså omvänt proportionellt mot observatörens avstånd till stjärnan i kvadrat. Absolut magnitud är ett sätt att beskriva ljusstyrka med en logaritmisk skala, och mäts alltid på avståndet 10 pc, vilket gör att den absoluta magnituden beror direkt av luminositeten.

(b) Apparenta magnituden är ett mått på stjärnans uppfattade ljusstyrka, vilket beror på avståndet mellan observatören och stjärnan. Det är med andra ord en logaritmisk skala av flux. Absolut magnitud mäter ljusstyrkan på avståndet 10 pc, och är därmed oberoende av avståndet till stjärnan, vilket gör det till ett logaritmiskt mått av luminositeten.

2.5  $2,6 \times 10^{-8} W m^{-2}$

2.6 (a) Rigel,  $\beta$  Ori med apparent magnitud 0,12 är starkare än Betelgeuse,  $\alpha$  Ori med apparent magnitud 0,50.

(b)  $m_\alpha - m_\beta = 0,50 - 0,12 = 0,38$

(c)  $\frac{F_\alpha}{F_\beta} \approx 0.70$

2.7  $340 W/m^2$

2.8 4,03 mag

2.9 0,84

2.10 (a)  $v = c \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = 3 \times 10^8 \times \frac{486,111 - 486,133}{486,133} m/s = 13,6 km/s$

(b) våglängden förkortas alltså blåförskjutning, stjärnan rör sig därför mot oss

2.11  $2,1^\circ$

2.12 620 412 km

2.13 -4.7 mag

2.14  $L = 3,7 \times 10^{31} W, M = -7,7, m = -2,3, \mu = 5,45, F_{yta} = 3,5 \times 10^{11} W m^{-2}, F_\oplus = 2,0 \times 10^{-7} W m^{-2}, \lambda_{max} = 103 nm$

2.15 Andromeda galaxen är inte ett punktojekt utan utspritt på en större vinkelarea på himlen. Detta innebär att våra ögon inte kommer att se allt koncentrerat. Absolut magnitud går att använda matematiskt men är enbart fysikaliskt för punktojekt.

2.16 Radien ökar med ca 32%

2.17  $2.18 \lambda = \frac{c}{f} = \frac{299792458 m s^{-1}}{1575 \times 10^6 Hz} = 0,1903 m$   
Eftersom våglängden är längre och frekvensen lägre än synligt ljus ( $= 400 nm - 700 nm$ ) är energin lägre.

2.18 10 kpc

2.19 (a) Då  $L \propto FA$  ger detta  $\frac{L_1}{L_2} = \frac{F_1 R_1^2}{F_2 R_2^2} = \frac{10^{14}}{10^{13}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4} = 2.5$  Den mindre stjärnan är alltså 2,5 gånger ljusstarkare än den större.

(b) Enligt Stefan-Boltzmanns lag är fluxen proportionell mot temperaturen i kvadrat ( $F \propto T^4$ ) Alltså är  $L \propto T^4 R^2$  vilket ger  $\frac{L_1}{L_2} = \frac{T_1^4 R_1^2}{T_2^4 R_2^2} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \approx 0,52$

2.20 Använd avståndsmodulen för att bryta ut avståndet till galaxen  $m - M = 5 \log \frac{d}{10 pc} \iff d = 10 pc \times 10^{\frac{m-M}{5}} = 10 pc \times 10^{\frac{7,5 - (-21,5)}{5}} = 6,5 Mpc$

**2.21** 63 000 km/s. Ja, Milles får köra hur mycket han vill.

**2.22** Radialhastigheten kan fås givet dopplerskift, och då förskjutningen är liten kan den icke-relativistiska formeln användas:  

$$v_r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} c = \frac{656,044 - 656,281}{656,281} \times 2,998 \times 10^5 = -108,27 \text{ km/s.}$$

För att beräkna den tangentiella hastigheten beräknas avståndet till stjärnan genom parallax enligt  $d = \frac{1}{0,552} = 1,81 \text{ pc}$ .

Detta ger en tangentiell hastighet på  

$$v_t = d\mu = \frac{10,31}{206265} \times 1,81 \times 3,086 \times 10^{13} \times \frac{1}{365,2422 \times 24 \times 3600} = 88,55 \text{ km/s} \approx 4,74 d\mu.$$

Den totala hastigheten fås genom Pythagoras sats:

$$v = \sqrt{(108,27)^2 + (88,55)^2} = 139,87 \text{ km/s}$$

**2.23** Avståndet till Andromeda bestäms med hjälp av avståndsmodulen till 733 kpc. Genom att rita en triangel och tillämpa våra trigonometriska funktioner får vi då  

$$\tan \frac{3}{2}^\circ = \frac{D/2}{733 \text{ kpc}} \iff D = 2 \tan 1,5^\circ \times 733 \text{ kpc} = 40 \text{ kpc.}$$

**2.24**  $T = 7 \times 10^3 \text{ K}, L = 10L_\odot = 3,826 \times 10^{27} \text{ W}, R = 2R_\odot \approx 1310000 \text{ km}$

**2.25** Vi sätter in den maximala våglängden i Wiens förskjutningslag enligt  $\lambda_{\max} T = 2,898 \text{ mmK} \iff T = \frac{2,898 \text{ mmK}}{190 \text{ nm}} = 15000 \text{ K}$   
 Eftersom vi vet att stjärnan ligger på huvudserien kan vi se att stjärnan borde ha en luminositet på ca  $100L_\odot$ . Eftersom flux avtar med kvadraten av avståndet innebär detta att planeten måste vara 10 gånger längre från sin stjärna än jorden är till solen, alltså 10 AU.

**2.26** 0,456 pc från solen.

**2.27** (a) Avståndet till systemet ges av  $d = \frac{1}{0,350} = 2,86 \text{ pc}$ . Vi använder avståndsmodulen för att beräkna den absoluta magnituden av Sirius A till  $M_A = -5 \log \frac{d}{10 \text{ pc}} + m_A = 1,25 \text{ mag}$ . Vi bör även ta hänsyn till den bolometriska korrektionen vilket ger  $M_{A,bol} = 1,25 - 0,4 = 1,85 \text{ mag}$ . På samma sätt kan vi bestämma Sirius B absoluta magnitud till  $M_{B,bol} = 10,82$ .

Deras respektive luminositeter beräknas utifrån  $\frac{M_1}{M_2} = -2,5 \log \frac{L_1}{L_2}$ , vilket då ger  $L_A = 1,37 \times 10^{28} \text{ W}$  samt  $L_B = 1,41 \times 10^{24} \text{ W}$ .

För att hitta stjärnornas radier används Stefan-Boltzmanns lag  $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ , genom att lösa för radien ger detta  $R_A = 1,39 \times 10^9 \text{ m}$  samt  $R_B = 2,25 \times 10^6 \text{ m}$

(b) Genom att omvandla vinkeln för stjärnornas separation till radianer,  $\frac{7}{206265} = 3,39 \times 10^{-5} \text{ rad}$ , kan vi rita upp en trigonometrisk situation där vi gör approximationen  $\tan \theta \approx \theta$  då  $\theta$  är mycket litet. Detta ger att systemets separation,  
 $s = d\theta = 3,39 \times 10^{-5} \times 2,86 = 9,71 \times 10^{-5} \text{ pc} \approx 3,00 \times 10^{12} \text{ m}$ .

**2.28** (a) A rör sig bara i x-led i figuren 0,5" mellan extremvärdena. Det ger en årlig parallax  $p = 0,25''$ , enligt parallaxformeln blir då avståndet till A  $d = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,25} = 4,0 \text{ pc}$ .

(b) Eftersom A rör sig fram och tillbaka längs x-axeln i figuren är det den riktningen som parallaxen syns. B rör sig 0,1" första halvåret och åter lika mycket andra och har alltså årlig parallax 0,05".  $d = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ pc}$

(c) Eftersom B återkommer till sitt läge i x-led efter ett år har den ingen egenrörelse i den riktningen men väl i y-led 0,25" mellan 2.7a och 2.7c. Alltså är  $\mu = 0,25''/\text{yr}$ .

(d) På avståndet 20 pc betyder det tangentialhastigheten  $v_t = 4,74 d\mu = 4,74 \times 0,25 \times 20 = 24 \text{ km/s}$ .

**2.29** (a)  $1,896 \times 10^5 M_\odot = 3,771 \times 10^{35} \text{ kg}$

(b) 0,689 pc

**2.30** (a)  $\lambda_{\max} = 57,96 \mu\text{m}$

(b) Genom att används Stefan-Boltzmanns lag och skriva om i förhållande till solen får vi  $R_{\text{dust}} =$

$$R_\odot \sqrt{\frac{L_{\text{dust}}}{L_\odot} \frac{T_\odot^4}{T_{\text{dust}}^4}}. \text{ Vilket ger } R_{\text{dust}} = 120,4 \text{ pc.}$$

$$(c) d_{dust} = \frac{cz}{H_0} = \frac{0,01 \times 2,998 \times 10^5}{70} = 42,83 \text{ Mpc.}$$

$$\theta = \frac{R_{dust}}{d_{dust}} \text{ rad} = 0,580''.$$

2.31 (a) 30 pc

(b)  $0,1L_{\odot}$

(c) 3500 K, det är en huvudseriestjärna, röd dvärg.

(d)  $M = 0,5M_{\odot}$ ,  $R = 0,7R_{\odot}$

(e) 83 km/s

$$3.10 \quad h_{\max} = \arctan\left(\frac{1}{1,83}\right) \approx 28,65^{\circ}, \quad h_{\min} = \arctan\left(\frac{1}{9,99}\right) \approx 5,72^{\circ}.$$

Alltså  $\phi = 90^{\circ} - \frac{h_{\max} - h_{\min}}{2} \approx 78,5^{\circ}$  och  $\delta = \frac{h_{\max} + h_{\min}}{2} \approx +17,2^{\circ}$ .

$$3.11 \quad h_{\max} = \arctan\left(\frac{1}{1,732}\right) = 30^{\circ}, \quad h_{\min} = \arctan\left(\frac{1}{5,671}\right) \approx 10^{\circ}.$$

Alltså  $\phi = 90^{\circ} - \frac{30^{\circ} - 10^{\circ}}{2} = 80^{\circ}$  och  $\delta = \frac{30^{\circ} + 10^{\circ}}{2} = +20^{\circ}$ .

### 3 Koordinatsystem

#### Övningar - 1

3.1 (a)  $\phi = 62^{\circ}$ . (b)  $\delta = +40^{\circ}$ . (c) Ja, eftersom  $h_{\min} = 12^{\circ} > 0$  (cirkumpolär).

3.2 Storcirkelsavståndet är  $\theta \approx 9,01^{\circ}$ , alltså  $d = R\theta \approx 6371 \text{ km} \cdot 0,1572 \approx 1,00 \cdot 10^3 \text{ km}$ .

3.3 Storcirkelsavståndet är  $\theta \approx 143,91^{\circ}$ , alltså  $d \approx 6371 \text{ km} \cdot 2,5119 \approx 1,60 \cdot 10^4 \text{ km}$ .

3.4  $\delta = \frac{74^{\circ} + (-6^{\circ})}{2} = +34^{\circ}$  och  $\phi = 90^{\circ} - \frac{74^{\circ} - (-6^{\circ})}{2} = 50^{\circ}$ . Alltså ungefär latitud  $50^{\circ}$  (på norra halvklotet om vi använder norra himmelspolen som P).

3.5 (a) Cirkumpolär  $\Leftrightarrow h_{\min} > 0 \Leftrightarrow \phi + \delta - 90^{\circ} > 0 \Leftrightarrow \delta > 90^{\circ} - \phi$ . (b) Geometriskt: objektets poldistans är  $90^{\circ} - \delta$ ; om den är mindre än polens höjd  $\phi$  ligger hela diurnalbanan över horisonten.

3.6 (a) Om stjärnan kulminerar i zenit gäller  $\delta = \phi$  (på norra halvklotet). (b)  $h_{\min} = \phi + \delta - 90^{\circ} = 2\phi - 90^{\circ}$ .

3.7  $h_{\max} = 90^{\circ} + \phi - \delta$  (fallet då objektet kulminerar norr om zenit).

3.8 Om  $\delta_{\odot} \approx +10^{\circ}$  under våren är det ungefär  $N \approx 26$  dagar efter vårdagjämningen, alltså kring **15–16 april**.

3.9 Den **1 maj** fås ungefär  $\lambda \approx 41,4^{\circ}$  och därmed  $\delta_{\odot} \approx \arcsin(\sin 23,44^{\circ} \cdot \sin 41,4^{\circ}) \approx +15,3^{\circ}$ .

#### Övningar - 2

3.12 PZX-triangeln har hörn P (norra himmelspolen), Z (zenit), X (objektet). Sidor:  $PZ = 90^{\circ} - \phi$ ,  $PX = 90^{\circ} - \delta$ ,  $ZX = 90^{\circ} - a$ . Vinklar: vid P är H (timvinkel), vid Z är A (azimut), vid X är den parallaktiska vinkeln  $q$ .

3.13  $\sin a = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos H$  ger  $a \approx 21,1^{\circ}$  (Betelgeuse står ca  $21^{\circ}$  över horisonten).

3.14 Vid uppgång är  $a = 0^{\circ}$ , så  $\cos H = -\tan \phi \tan \delta \Rightarrow \cos H \approx 0,4366$ . Alltså  $H \approx 64,1^{\circ}$ . Vid **uppgång i öst**:  $H \approx -64,1^{\circ}$  (alternativt  $295,9^{\circ}$ ).

3.15 Vid uppgång ( $h = 0$ ) fås  $\cos A = \frac{\sin \delta}{\cos \phi}$ . Med  $\phi = 45^{\circ}$ ,  $\delta = 39^{\circ}$  blir  $A \approx 27,1^{\circ}$  (azimut mätt österut från nord: ungefär **N 27° E**).

3.16 I Paris på vårdagjämningen är  $\delta = 0^{\circ}$  och vid lokal middag  $h = 90^{\circ} - \phi = 42^{\circ}$ . Skugglängden för 1 m pinne:  $l = \cot h = \frac{1}{\tan 42^{\circ}} \approx 1,11 \text{ m}$ .

3.17 I Madrid på vårdagjämningen:  $\phi = 40^{\circ}$ ,  $\delta = 0^{\circ}$ . Kl. 15:00 (soltid) ger  $H = 45^{\circ}$ .  $\sin a = \cos \phi \cos H$  ger  $a \approx 32,8^{\circ}$ . Arias skugga:  $l = \frac{1,8}{\tan 32,8^{\circ}} \approx 2,79 \text{ m}$ .

3.18 Resultaten (med standardgeometri mellan ekliptik och ekvator) är:  $\sin \delta_{\odot} = \sin \epsilon \sin \lambda_{\odot}$  och  $\tan \alpha_{\odot} = \cos \epsilon \tan \lambda_{\odot}$ .

## 4 Optik

**4.1** Stjärnljus kan behandlas som parallellt eftersom stjärnor ligger extremt långt bort jämfört med teleskopets storlek. Strålar-na träffar därför objektivet med praktiskt taget samma riktning.

**4.2** Bilden blir upp och ner eftersom objektivet (en samlingslins) bildar en verklig inverterad mellanbild i fokus. Okularet förstorar bara denna redan inverterade bild.

**4.3** Det är bättre att öka **diametern**. Enligt Rayleighkriteriet  $\Theta \approx 1,22\lambda/D$  förbättras upplösningen när  $D$  ökar. Förstoring skapar inte ny detalj.

**4.4 Okularkarusellen:** Förstoringen  $M = f_{\text{obj}}/f_{\text{ok}}$ .

$$M_{25} = 48, \quad M_{10} = 120, \quad M_6 = 200.$$

Störst förstoring fås med 6 mm:  $200\times$ .

**4.5 Synfältsspelet:**

$$\text{TFOV} \approx \frac{\text{AFOV}}{M}.$$

- (a)  $f_{\text{ok}} = 25 \text{ mm}$ :  $\text{TFOV} \approx 1,08^\circ$ .  
 (b)  $f_{\text{ok}} = 10 \text{ mm}$ :  $\text{TFOV} \approx 0,433^\circ$ .  
 (c) Synfältet minskar när förstoringen ökar.

**4.6 Rayleigh-duellen:**  $\Theta = 1,22\lambda/D$ .

- (a)  $D = 60 \text{ mm}$ :  $\Theta \approx 1,12 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$ .  
 (b)  $D = 120 \text{ mm}$ :  $\Theta \approx 5,59 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$ .  
 (c) När  $D$  fördubblas halveras  $\Theta$ .

**4.7 Vinkelupplösning:**  $2,0''$ .

- (a)  $2,0'' = 5,56 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$ .  
 (b)  $2,0'' \approx 9,70 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$ .  
 (c) Med  $D = 0,10 \text{ m}$ :

$$\lambda \approx 8,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

(ca 800 nm).

**4.8 Hur stor öppning behövs?**

$$D = \frac{1,22\lambda}{\Theta}$$

med  $\lambda = 550 \text{ nm}$  och  $\Theta = 1''$  ger

$$D \approx 0,14 \text{ m}.$$

**4.9 Light up those pixels:**

$$\left(\frac{200}{80}\right)^2 = 6,25.$$

Det större teleskopet samlar in **6,25 gånger** mer ljus.

**4.10 Stjärnan närmare än solen:**

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

med  $a = 5,0 \text{ m}$  och  $f = 0,20 \text{ m}$  ger

$$b \approx 0,208 \text{ m}.$$

Eftersom  $a \gg f$  ligger bilden nära fokalplanet.

## AO Sr Finaluppgifter

**4.11 (3.4) a)**

$$D = 4,2458 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,284 \text{ AU}.$$

**b)**

$$t = 2,52 \cdot 10^{17} \text{ s} = 8,00 \cdot 10^9 \text{ år}.$$

**4.12 (3.5)** Teleskopets upplösning är bättre än fläckens vinkelstorlek. **Den går att se med teleskopet.**

## 5 Banmekanik

5.1  $7,48 \cdot 10^8 \text{ km}$

5.2 a)  $v \approx 7,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$   
 b)  $T \approx 92 \text{ min}$   
 c)  $T^2 \propto r^3$

5.3  $e \approx 0,0167$

5.4  $F \approx 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ N}$

5.5 Skillnaden mellan de två formlerna, är att ett utav dem  $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}$  gäller endast för en massa som kretsar kring ett fixerat objekt. Med andra ord om en kropp är betydligt mer massivt än det andra. Exempelvis med solen och jorden:  $M_{\odot} \gg M_{\oplus}$  så kan vi skriva  $\sim T^2 = \dots \frac{1}{GM_{\odot}}$ . Men när vi har två kroppar som är närmare i massa, accelererar de båda mot varandra och då kan vi inte försumma en av massorna. Därför måste vi räkna med båda massorna i kraftekvationen, innan hastighetsformeln.

5.6  $F = 3,4 \cdot 10^{-5} \text{ N}$

5.7 a)  $2,5 \text{ dygn}$   
 b)  $e \approx 0,22$

5.8  $g \approx 3,32 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

5.9  $M_S \approx 3,5 \cdot 10^6 M_{\odot}$

5.10 a)  $a 0,190 \text{ AU}$   
 b)  $R_p \approx 6,28 \cdot 10^6 \text{ m}$   
 c)  $\rho \approx 36,3 \text{ g/cm}^3$   
 d)  $g_p \approx 637 \text{ m/s}^2$

5.11 a)  $7,5 \cdot 10^8 \text{ m}$  &  $e = 0,6$   
 b)  $74,8 \text{ dygn}$

5.12  $248 \text{ år}$

5.13  $0,462 \text{ ms}$

## 6 Astrofysik

6.1 a) Huvudserie (Röd dvärg), b) Vit dvärg, c) Röd superjätte, d) Huvudserie.

6.2 Den starkares radie är ca 5 gånger större.

6.3 Stjärnan blir ca 120 gånger ljusstarkare.

6.4  $597 \text{ kpc}$

6.5  $133 \text{ pc}$

6.6 Den var inte typ 1a.

6.7  $6,9 \text{ Mpc}$

6.8  $1650 L_{\odot}$ .

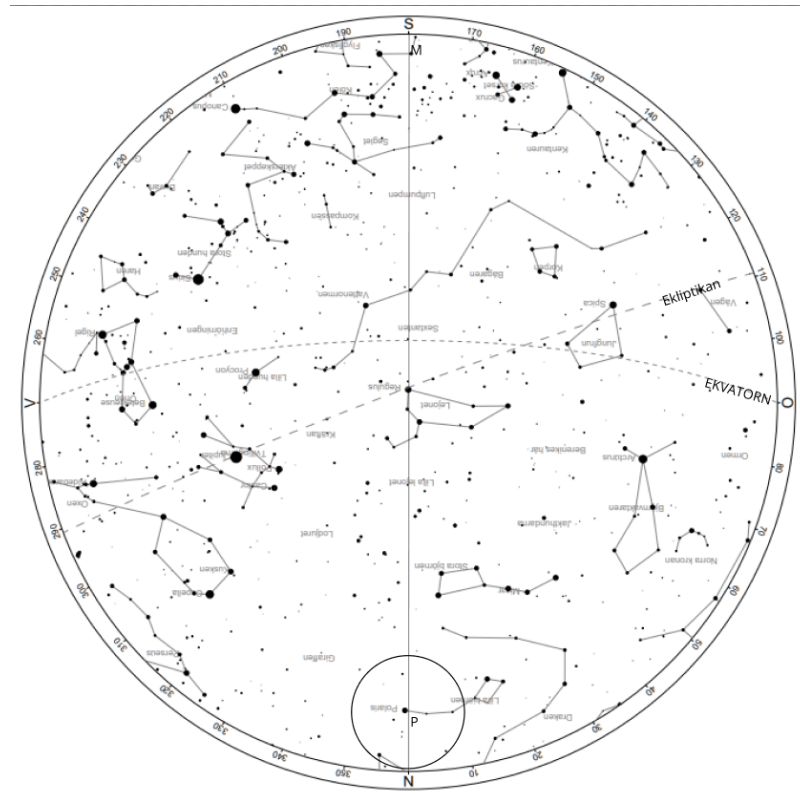
6.9  $t \sim M^{-\frac{5}{7}}$

6.10  $4 \cdot 10^{40} \text{ kg}$

6.11 a. B, A, C från yngst till äldst. b. 70 miljoner år

## 7 Natthimmel

7.1 15 grader



# Litteratur

- [1] Chandra X-ray Observatory. *Pulsating Variable Stars and the Hertzsprung-Russell (H-R) Diagram*. Hämtad 27 april 2025. 2012. URL: [https://chandra.harvard.edu/formal/variable\\_stars/bg\\_info.html](https://chandra.harvard.edu/formal/variable_stars/bg_info.html).
- [2] *Edwin Hubble's Original Tuning Fork Diagram*. Image featured in the Galaxies Lab section of the ASTR 1020L course at Georgia State University. n.d. URL: <https://sites.gsu.edu/astr1020lab/galaxies-lab/>.
- [3] Encyclopaedia Britannica. *Nuclear Binding Energy*. Accessed: March 30, 2025. 2025. URL: <https://www.britannica.com/science/nuclear-binding-energy>.
- [4] ESO. *A hard day's night ahead*. <https://www.eso.org/public/images/potw1239a/>. Accessed: 2025-04-28. 2025.
- [5] ESO. *Transparency of the atmosphere*. [https://www.eso.org/public/images/atm\\_opacity/](https://www.eso.org/public/images/atm_opacity/). Accessed: 2025-04-28. 2025.
- [6] Niall Deacon IAU OAE SDSS. *Spectrum of an F-type star*. Accessed: 2025-03-30. 2025. URL: <https://www.astro4edu.org/resources/diagram/zY580V14PE47/>.
- [7] Matthew Newby. *Galaxy Rotation Curve*. Published May 4, 2019. Image illustrating the rotation curve problem in galaxies, created by the author. 2019. URL: <https://sites.temple.edu/profnewby/2019/05/04/galaxy-rotation-curve/>.
- [8] OGLE Project. *OGLE: Optical Gravitational Lensing Experiment*. <https://ogle.astrouw.edu.pl>. Accessed: March 2025.
- [9] W. M. Keck Observatory. *Photos*. <https://keckobservatory.org/media/photos/>. Accessed: 2025-04-28. 2025.
- [10] Д.Ильин. *Heat Transfer in Stars*. Accessed: 2025-03-30. 2021. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Heat\\_Transfer\\_in\\_Stars.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Heat_Transfer_in_Stars.svg).