

[2]



Astronomiolympiadens Teorikompendium

ASTRONOMISK UNGDOMS ELEVFÖRBUND
1:a Upplagan: Olympiadgruppen, 2025

Förord

Teorikompendiet är en resurs skapad för den svenska astronomiolympiadens finalvecka. Teorin som skrivs i kompendiet motsvarar de föreläsningar som ges under veckan och bör därför användas som stöd för den intresserade studenten. Problemen i kompendiet är skrivna som förberedelser till astronomiolympiadens finaltävling och håller därav i många fall hög nivå. Denna utgåva skapades specifikt för 2025 års final.

Om man vill använda kompendiet för undervisning eller i annan verksamhet är det fritt fram att göra så men citera Astronomisk Ungdom och Astronomiolympiaden när ni gör så. Om ni har synpunkter eller vill få upplysningar om kompendiets innehåll så kan ni kontakta olympiaden direkt genom astronomiolympiaden@astronomiskungdom.se.

Vi vill tacka Viktor Stubbält för bild och utformning av kompendiets framsida. Vi vill också tacka Jane Street, Skolverket och Folke Bernadottes minnesfond för finansiering till årets olympiad.

Innehåll

1	Astronomi	5
1	Parallax	5
2	Flux och magnituder	5
3	Svartkroppsstrålning	7
4	Spektrallinjer	8
5	Radialhastighet	8
6	Uppgifter	9
2	Observationell astronomi	13
1	Tid	13
2	Sfärisk trigonometri	13
3	Rymdkoordinater	18
4	Himlavalvets förändring	28
5	Stjärnkartor	29
6	Namnsättning	31
7	Teleskop	31
8	Uppgifter	34
3	Banmekanik	37
1	Keplers lagar	37
2	Banenergi	38
3	Omloppshastighet	40
4	Raketfysik	40
5	Uppgifter	42
4	Astrofysik	45
1	Virialsatsen	45
2	Hydrostatisk jämvikt	46
3	Exotiska rester	50
4	Variabla stjärnor	51
5	Binära system	52
6	Stjärnhopar	53
7	Galaktisk astrofysik	53
8	Uppgifter	55
5	Kosmologi	59
1	Hubbles lag	59
2	Skalfaktorn	59
3	Friedmanns första ekvation	61
4	Uppgifter	65

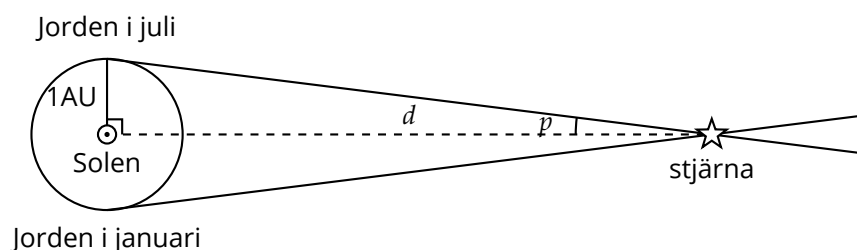
6	Statistik	66
1	Dataanalys för IOAA	66
2	Normalfördelningen och liknande	67
3	Linjär regression och osäkerhetsintervall	72
4	Bevis och Kursivt material	74
7	Facit till uppgifter	76
1	Astronomi	76
2	Observationell Astronomi	76
3	Banmekanik	77
4	Astrofysik	77
5	Kosmologi	77
6	Statistik	77

Kapitel 1

Astronomi

1 Parallax

Stjärnors rörelser över himlen är alltid mycket små på grund av deras enorma avstånd så för att upptäcka deras rörelser krävs specialiserade teleskop. Stjärnans rörelse på himlen har två komponenter: egenrörelse och parallax. Egenrörelsen kommer från att stjärnan i sig rör sig fritt med en viss hastighet medan parallaxen beror på perspektiv.



Figur 1.1: Hur parallaxeffekten kommer från perspektivförändringar mot stjärnorna.

När jorden rör sig i sin omloppsbana kring solen kommer vår position relativt en stillastående stjärna ändras något. För oss kommer det se ut som att stjärnan rör sig på himlen med en period på ett år. Den vinkeln som stjärnan maximalt rör sig är dubbelt så stor som den så kallade parallaxvinkeln - p . Med trigonometri kan vi beräkna hur stort avståndet är till stjärnan som en funktion av parallaxen enligt

$$d = \frac{1\text{AU}}{\tan p}.$$

Om vi antar att p är mycket litet kan vi förenkla bort tangens i uttrycket. Utöver detta kan vi definiera en ny enhet så att den multiplikativa konstanten försvinner. Denna nya enhet kallar parsec och definieras som avståndet till en stjärna med parallaxen en bågsekund ($1^\circ/3600$). Detta ger i rätt enheter

$$d = \frac{1}{p}. \quad (1.1)$$

2 Flux och magnituder

Ljus är energi i form av vågor som rör sig i vakuum. Detta innebär att vi kan mäta hur starkt något lyser väldigt enkelt med vilken effekt det har. Inom astronomin har vi speciella namn för detta.

Den totala effekten hos en stjärna kallar vi för **luminositet**, L , och den intensitet av stjärnans ljus som vi observerar på jorden kallas **flux**, F . Eftersom en stjärnas ljus är lika starkt i alla riktningar kan vi säga att energin sprider ut sig jämnt öve en sfär. Detta gör att vi kan beskriva fluxet som

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} \quad (1.2)$$

där d är avståndet till stjärnan. Ett annat sätt att beskriva flux som är väldigt vanligt i astronomin är **magnituder**, m . Detta är en logaritmisk skala från det antika Grekland. Oftast beskriver man skalan endast när man jämför två magnituder. Då ser den ut såhär:

$$m_1 - m_2 = -2,5 \lg \frac{F_1}{F_2}. \quad (1.3)$$

Alltså kommer en 10 gånger *starkare* stjärna ha en magnitud som är 2,5 *lägre*, notera: inte gånger. Magnitud 0 definierar man till stjärnan Vega. Om vi vill jämföra luminositeten av stjärnor kan vi istället använda oss av **absolut magnitud**, M . Den absoluta magnituden för en stjärna definieras som magnituden på ett avstånd av 10 parsec. Om vi sätter in (1.2) i (1.3) och sätter avståndet till 10 pc får vi

$$m - M = 5 \lg \frac{d}{10 \text{ pc}} \quad (1.4)$$

där d är avståndet till stjärnan. Denna ekvationen kallas för **avståndsmodulen**. Värt att notera är att absoluta magnituder också kan skrivas som en kvot mellan luminositeter som tidigare:

$$M_1 - M_2 = -2,5 \lg \frac{L_1}{L_2}. \quad (1.5)$$

2.1 Interstellära mediet

Mellan stjärnor är det inte bara tomt utan det finns stora mängder gas och stoft som absorberar ljus. Detta innebär att den apparenta magnituden måste justeras för all absorption med en faktor A . Detta kallar vi för **extinktion**. Vi får en justerad avståndsmodul enligt

$$m - M = 5 \lg \frac{d}{10 \text{ pc}} + A. \quad (1.6)$$

Om vi antar att gasen och stoftet har konstant optiskt djup längs vägen, alltså att absorptionen är lika stark överallt, kan vi få fram ett linjärt förhållande enligt

$$A = \mu d, \quad (1.7)$$

där μ är gasens optiska djup. μ beror både på gasens densitet och våglängden hos ljuset vi studerar. Detta innebär att extinktion kan påverka färgen av stjärnor och därmed temperaturmätningar.

2.2 Bolometrisk korrektion

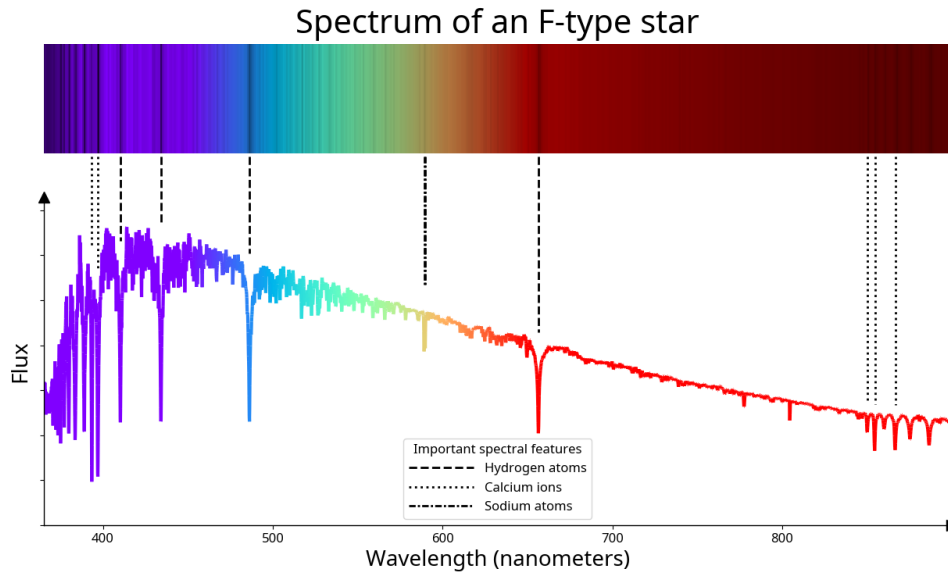
Ofta anges magnituder enbart i det optiska spektrumet, alltså synligt ljus, och all annan flux-/luminositet bortkastas. När man bedriver astrofysik vill man dock ofta veta den totala luminositeten/magnituden av en stjärna och behöver därför korrigera för bortfallet. Detta kallas för **bolometrisk korrektion**. Korrektionen, BC , görs i magnituder och ser därav ut som

$$M_{\text{Bol.}} = M_V + BC, \quad (1.8)$$

där M_{Bol} är den bolometrisk (totala) magnituden och M_V är magnituden i det synliga filtret. Eftersom magnituder är definierade utifrån stjärnan Vega kommer stjärnor som liknar Vega i temperatur ha en bolometrisk korrektion nära 0 medan stjärnor som antingen är mycket kalla eller mycket varma kommer ha stora korrekationer. Bolometrisk korrektionsfaktorn kan beräknas teoretiskt utifrån planckkurvan men i praktiken används alltid tabeller för att korrigera magnituder.

3 Svartkroppsstrålning

Spektrumet av en stjärna kan vara den viktigaste datapunkten av de tre när det kommer till dess analys. Genom spektrallinjer kan vi hitta stjärnans kemiska innehåll, genom spektrumets form kan vi hitta temperaturen - T - och genom dess förflyttning kan vi hitta den radiala hastigheten. Stjärnor i huvuddelen av sina liv kan ses som perfekta svartkroppar. Detta innebär att vi kan



Figur 1.2: Spektrumet av en typisk stjärna av typ F. [6]

använda oss av Plancks strålningslag som ser ut som följande

$$B(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \quad (1.9)$$

där h är Plancks konstant, c är ljusets hastighet, λ är våglängden av ljuset, k_B är Boltzmanns konstant och T är yttemperaturen av stjärnan. genom att derivera denna formel kan vi finna Wiens förskjutningslag, ett verktyg för att finna yttemperaturen enkelt från spektrat:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} B(\lambda, T) = 0 \Rightarrow \lambda_{\max} \cdot T = 2,898 \text{ mm K} \quad (1.10)$$

där $\lambda_{\max}$ är den våglängd där stjärnan strålar mest. Genom att istället integrera över alla våglängder och vinklar får vi Stefan-Boltzmanns strålningslag:

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4 \quad (1.11)$$

där R är radien av stjärnan och σ är Stefan-Boltzmanns konstant. På detta vis kan vi finna storlekarna av stjärnor.

4 Spektrallinjer

Stjärnspektrum följer inte Plancks strålningslag perfekt och är därav inte perfekta svartkroppar. Dessa imperfektioner orsakas av att grundämnen i stjärnornas atmosfärer absorberar fotoner som motsvarar energinivåerna i deras elektronlager. Djupet av dessa linjer kan ge oss information om den kemiska sammansättningen av stjärnan. I praktiken består alla stjärnor till 75% av väte, 24% helium och resterande tyngre ämnen som vi kallar metaller. Halten metaller kallas metallicitet.

Spektrallinjernas bredd och position kan beräknas experimentellt och kan på så sätt användas som en referens för störningar och relativa hastigheter. För väte gäller Rydbergs formel för att finna våglängden för ljus i övergången mellan lager n och m :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (1.12)$$

där $R_H = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ är Rydbergkonstanten och λ är våglängden av ljuset som absorberas/emitteras.

5 Radialhastighet

När det kommer till radial hastighet kan detta fås ur ekvationen för dopplerskift. När vi observerar ett spektrum kan spektrallinjer förflyttas jämfört med deras förväntade positioner, detta beror på att källan rör sig relativt oss. Klassiskt kan detta beskrivas

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{v}{c} = z \quad (1.13)$$

vilket gäller då $v \ll c$. Detta kan göras mer exakt för högre v relativistiskt enligt

$$\frac{f_r}{f_e} = z + 1 = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad (1.14)$$

där f_r är den mottagna frekvensen och f_e är den utsända.

Viktiga formler

$$d = \frac{1}{p}$$

$$m_1 - m_2 = -2.5 \lg \frac{F_1}{F_2}$$

$$m - M = 5 \lg \frac{d}{10 \text{ pc}} + A$$

$$\lambda_{\text{max}} T = 2.898 \text{ mm K}$$

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$$

$$z = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} - 1 \approx \frac{v}{c}$$

6 Uppgifter

- 1.1 Över loppet av ett år verkar en stjärna flytta sig $0.38''$ över natthimlen och sen tillbaka igen. Hur långt bort är stjärnan?
- 1.2 2 stjärnor ligger mycket nära varandra på stjärnhimlen. Stjärnorna förväntas dessutom vara identiska i typ och luminositet, trots detta är den enas apparenta magnitud 1.5 högre än den andras. Under ett år flyttas dessa två $0.067''$ jämfört varandra, hur långt borta är den första resp. andra stjärnan från solen?
- 1.3 Hur stort flux ger stjärnan Vega som har en apparent magnitud på 0.00 ?
- 1.4 Vilken absolut magnitud har en LED-lampa på 100W ? Om vi antar att lampan endast skickar ut fotoner med våglängden 500 nm uniformt på en sfär runtomkring lampan, vad är medeltiden mellan två fotoner som träffar 1 m^2 vid 10 pc ?
- 1.5 $\zeta 1 \text{ Lyr}$ och $\zeta 2 \text{ Lyr}$ är två stjärnor som befinner sig väldigt nära varandra och som inte kan uppfattas som två skilda stjärnor utan teleskop. Deras enskilda magnituder är 4.30 respektive 5.70 . Vilken magnitud skulle en människa se dem tillsammans?
- 1.6 En stjärna har en bolometrisk korrektion på -0.19 . Vad är kvoten av ljusstyrkan mellan den strålning som stjärnan sänder ut i det synliga spektrumet jämfört mot hela spektrumet?
- 1.7 Vilken magnitud har Jupiter vid opposition? *Ledtråd:* Jupiter reflekterar ungefär 34% av den strålning som träffar planeten från solen.
- 1.8 Den lägsta magnituden en människa kan se vid perfekta tillstånd är runt 6.5 . Det finns ungefär 9100 stjärnor som är mer ljusstark än 6.5 magnituder. Om alla dessa skulle vara fördelade jämt på himlen, vad skulle medelvinkeln mellan två närliggande stjärnor vara?
- 1.9 Betrakta en modell av stjärnan Dschubba ($\delta \text{ Sco}$), den centrala stjärnan i huvudet av konstellationen Skorpionen. Antag att Dschubba är en sfäriska svartkropp med en ytemperatur på $28,000 \text{ K}$ och en radie på $5,16 \times 10^9 \text{ m}$. Låt denna modellstjärnan vara 123 pc från jorden. Bestäm följande för stjärnan: luminositeten, absoluta bolometrisk magnituden, apparenta bolometrisk magnituden, avståndsmodulen, fluxet mätt vid stjärnans yta, fluxet mätt från jorden och den maximala våglängden λ_{max} .
- 1.10 Andromedagalaxen har en magnitud på 3.44 . Detta borde betyda att om vi kan se

stjärnor ned till 6.5 magnituder att vi relativt lätt borde kunna se Andromedagalaxen väldigt tydligt under normala nättar. Detta är dock inte fallet (pröva själv om du kan se andromedagalaxen med dina ögon, jämför också hur en stjärna med samma magnitud ser ut). Förklara varför Andromedagalaxen är mycket svårare att se än en stjärna med samma magnitud. Är det rimligt att använda en absolut magnitud från 10 pc när man talar om galaxer och stora objekt?

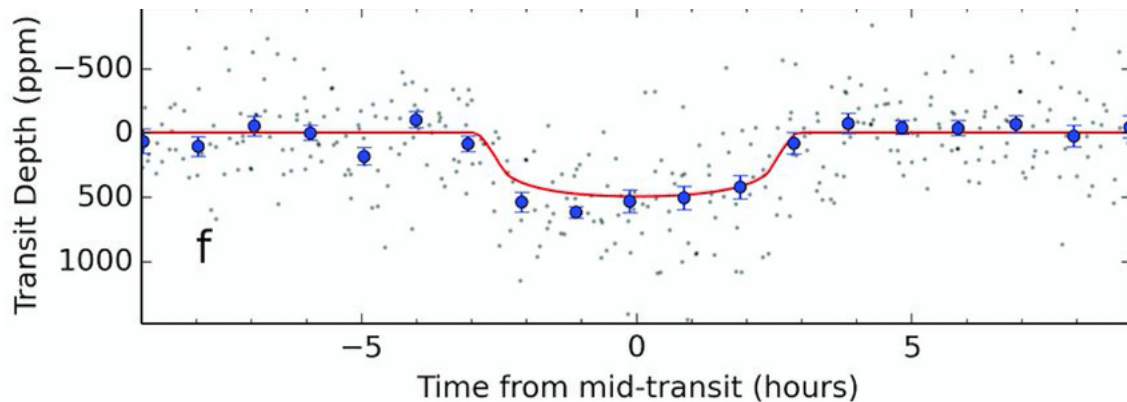
- 1.11** I vintergatans plan påverkar det interstellära mediet ljuset som färdas genom det till att minska sin ljusstyrka med ungefär 1,8 magnituder per kiloparsec. Om vi skulle observera en stjärna i huvudserien på andra sidan galaxen, vilken osäkerhet på stjärnans radie skulle vi då förväntas få? Avståndet till centrum av Vintergatan från oss är runt 8 kiloparsec, och vi kan anta att galaxen når ut till en radie på 13 kiloparsec.
- 1.12** Barnards stjärna är den stjärna med den största egenrörelsen av alla stjärnor (alltså vinkelhastighet över himlen) på $10,4''$ per år. Stjärnan har en parallax på 547 mas (milliarcseconds). Stjärnan sänder även ut $H\alpha$ linjen med en våglängd på 656.039 nm som normalt har våglängden 656.281 nm i luft. När kommer denna stjärnan vara som närmast oss, och hur långt kommer den då vara?
- 1.13** Ett vanligt sätt att hitta gasmoln ute i rymden är att leta efter H I linjen eller 21 centimeter linjen. Denna uppstår när en elektron i en väteatom hoppar mellan två hyperfina energinivåer under ett så kallat spin-flip. Då ändras elektronens spin från att vara samma som protonen till att ha motsatt spin som protonen. Ignorerar vi några jobbiga saker kan vi uppskatta att $2,9 \times 10^{-15}$ övergångar sker per sekund. Om ett lagom kompakt gasmoln med samma massa som vår sol består av 70% väte befinner sig 442 pc från oss endast strålar denna 21cm linjen, vilken magnitud skulle den då ha?
- 1.14** Milles kör bil. Han gillar inte att stanna vid rödlys. Hur snabbt måste Milles köra för att få rödlyset (625 nm) att se grönt ut (505 nm) för honom? Om allt är relativt, kan han argumentera för varför han inte borde få böter?
- 1.15** (Final 2023) Venus hastighet mäts med 12,5cm våglängd radiovågor, av en astronaut vid 1AU från solen (stationär, ej i omloppsbana), när Venus-Solen-Astronaut bildar en rät vinkel. Returvågen från radarns utsända ljus har våglängden 12,4988cm. Räkna ut Venus omloppshastighet från detta.
- 1.16** (Final 2023) Anta att en typ 1a-supernova med absolut magnitud $M = -19,5$ skulle uppstå på avståndet 9kpc och att extinktionen orsakad av interstellära mediet är $0,9 \text{ mag kpc}^{-1}$ mellan oss och detta objekt. Beräkna vilken apparent magnitud supernovan skulle få.
- 1.17** (Finaluppgift 2021) På vilken punkt i rymden mellan solen och Sirius lyser dessa himlakroppar lika starkt? Sirius magnitud är -1.4 och dess avstånd är 2,637 pc.
- 1.18** (Final 2023) Rymdteleskopet Kepler (senare K2), har sedan 2009 letat efter exoplaneter genom transitmetoden. Kring stjärnan Kepler-186 (KIC8120608) upptäckte Kepler-teleskopet 5 planeter, varav den yttersta, Kepler-186f, är av särskilt intresse.
- (a) Kepler-186 har apparent magnitud 12,5mag, parallax 5,60mas, och spektrummaximum vid 771,7nm. Bestäm stjärnans avstånd, radie, och luminositet.
 - (b) Nedan finnes en s.k. "folded" ljuskurva från Kepler-186 med transits av Kepler-186f. Kepler-186f har en omloppsperiod på 129,9dagar och Kepler-186 har massa $0,47M_{\odot}$. Bestäm Kepler-186f:s radie och omloppsradie
 - (c) Massan av Kepler-186f är svårerimerad, men vi antar att om det är en stenplanet har den en albedo på 0,3, och om det är en gasjätte har den

en albedo på 0,6. Beräkna ekvilibri-
umtemperaturen av Kepler-186f, gi-
vet att den inte har en atmosfär.

**1.19 Lätt att skina när man är omgiven
av stjärnor** (Final 2024) Herkuleshopen,
M13, är en klotformig globulär stjärnhop
(kluster) i stjärnbilden Herkules. M13 är
6800 pc från oss och har en skenbar stor-
lek på 20 bågminuter (i diameter) vilket

motsvarar en radie på 19,8 pc, dessutom
är magnituden av M13 5,8.

- (a) Om vi uppskattar att alla stjärnor
i M13 liknar vår sol (vilket inte är
ett korrekt antagande), hur mycket
massa finns då i M13?
- (b) Uppskatta medelavståndet mellan
två närliggande stjärnor i stjärnho-
pen.

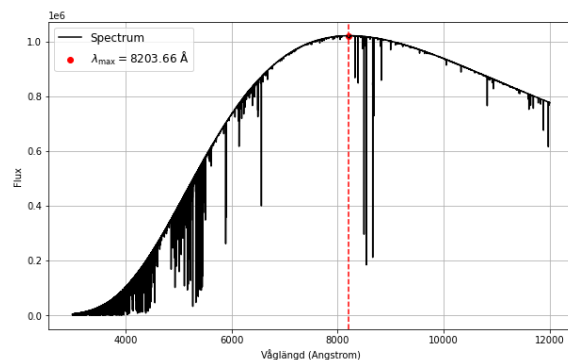


Figur 1.3: En ljuskurva från Kepler-186 med vikta transits av Kepler-186f. Den röda linjen är best-fit från MCMC-simuleringar.

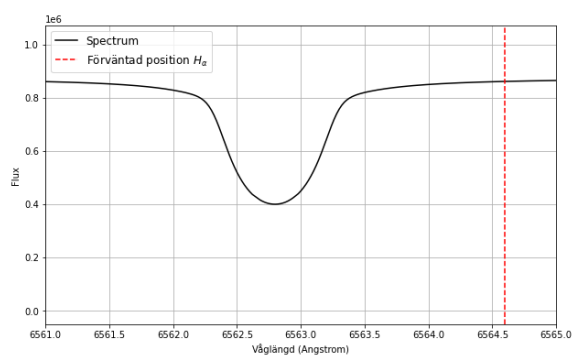
1.20 Stjärnan Nova Stella. Följande data har
samlats från den avlägsna stjärnan Nova
Stella med teleskop på jorden. Stjärnans
apparenta magnitud är +9,9

- (a) Bestäm avståndet till stjärnan från
Jorden.
- (b) Bestäm stjärnans luminositet i sollu-
minositeter eller absoluta magnitud.
- (c) Bestäm stjärnans temperatur samt
vilken typ av stjärna den är utifrån ett
HR-diagram.
- (d) Bestäm stjärnans massa och radie i
solmassor och solradier.
- (e) Bestäm stjärnans totala hastighet,
inkludera både vinkelhastigheten
över himlen och radial hastighet.
- (f) Bestäm när stjärnan kommer vara
närmast oss om man bortser från
gravitationella effekter. Vid vilket av-
stånd kommer den vara då?

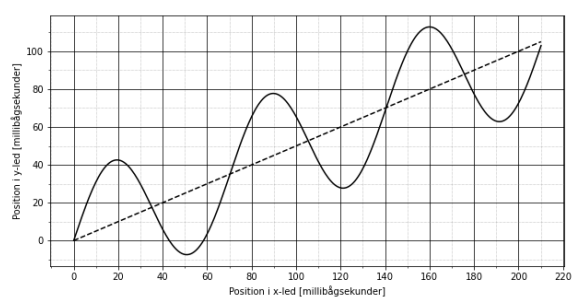
- (g) Anta att all breddning av H_{α} linjen
kommer från rotation (OBS! Ej fysi-
kaliskt). Vad kommer stjärnans rota-
tionstid vara då?



Figur 1.4: Spektrumet av Nova Stella. Datan
har genererats via POLLUX.



Figur 1.5: Inzoomad plot av H α linjen i Nova Stella.



Figur 1.6: Utveckling av Nova Stellas position över 3 år. Förväntad parallaxriktning är i y.

Kapitel 2

Observationell astronomi

1 Tid

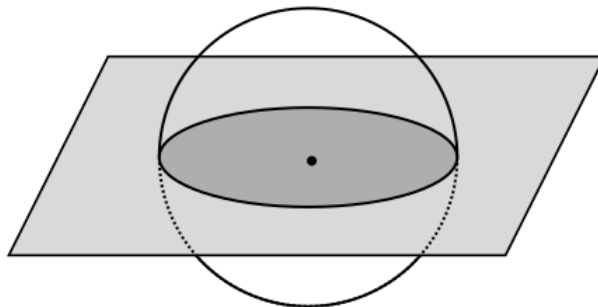
Det finns flera sätt att definiera ett dygn inom astronomin och att vet skillnaden är (tyvärr) viktigt. Det vanliga dygnet du är van vid är definierat som tid det tar mellan att solen står högst upp på himlen tills att den gör så igen. Detta kallas för ett **synodiskt dygn** och är definierat till 24h. Solen kommer dock att ha flyttat sig lite under dygnet så om vi vill vet hur lång tid det tar för stjärnorna att återkomma till sin plats behöver vi ett **sideriskt dygn** vilket är ca 23h 56min 4s. Oftast inom astronomin är vi mer intresserade av stjärnorna och använder därför det sideriska dygnet. På ett år går det ca 365,24 synodiska dygn och 366,24 sideriska dygn.

2 Sfärisk trigonometri

Himmeln är en sfär, alltså måste vi lära oss hur vi beräknar avstånd och vinklar på en sfär för att få en bättre förståelse för observationer.

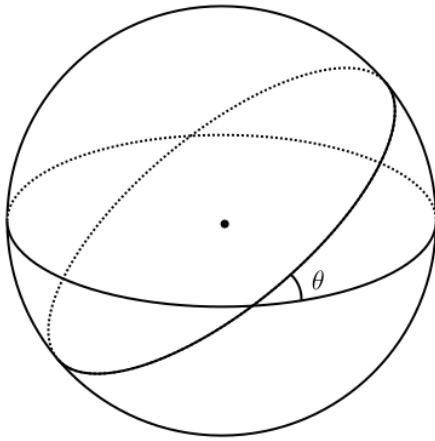
2.1 Storcirklar

En **storcirkel** är skärningen mellan en sfär och ett plan som går genom sfärens centrum. Stora cirklar är de största möjliga cirklar som kan ritas på en sfär, och de delar sfären i två lika halvor. På Jorden är ekvatorn och longitudlinjerna exempel på storcirklar. Alla storcirklar har samma radie som själva sfären. I sfärisk geometri mäts alla vinklar mellan storcirklar som visas i Figur

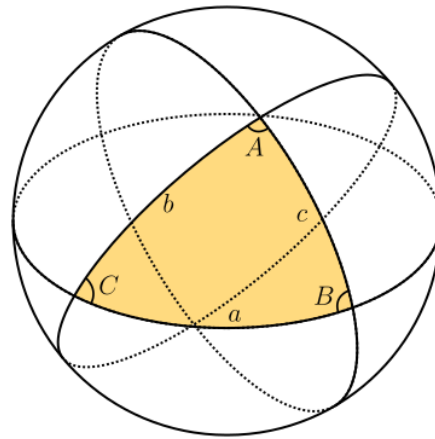


Figur 2.1: Storcirklar är skärningen av ett plan genom klotets mitt.

2.2a.



(a) Vinkeln mellan två storcirkclar.



(b) En sfärisk triangel.

Figur 2.2: Två demonstrerande sfärer.

+++

2.2 Sinus- och cosinusformler för sfäriska trianglar

På ytan av en sfär bildas en sfärisk triangel av tre bågar av stora cirklar. Den sfäriska cosinuslagen och den sfäriska sinuslagen relaterar vinklar och sidor i dessa sfäriska trianglar. Betrakta den sfäriska triangeln som visas i **Figur 2.2b**.

För en sfärisk triangel med sidorna a , b och c (mätta i vinkelmått, såsom radianer), och vinklarna A , B och C mot dessa sidor, är formlerna som följer:

Sfärisk cosinuslag:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Sfärisk sinuslag:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

Dessa formler gör att vi kan beräkna vinklar eller sidor i en sfärisk triangel när vi känner till de andra kvantiteterna.

Viktig Not: Vi behöver bara tre komponenter av en sfärisk triangel för att kunna hitta de andra komponenterna.

2.3 Exempel: Hitta avståndet mellan två städer på Jorden

Låt oss tillämpa sfärisk geometri för att hitta avståndet mellan två städer på Jorden. För att göra detta behöver vi latituden och longituden för varje stad. Låt oss snabbt gå igenom begreppen latitud och longitud:

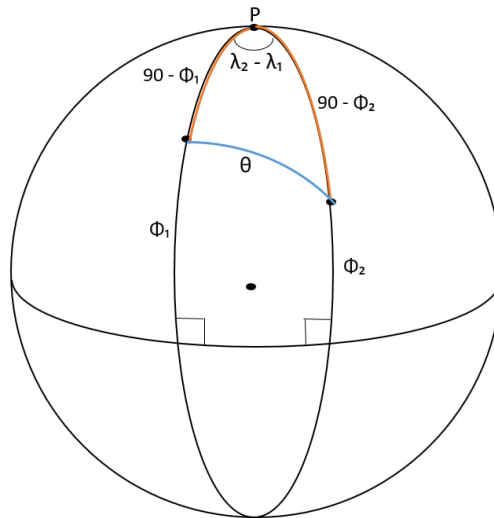
★ **Latitud:** Den vinkelmässiga avståndet (båge av en storcirkel) från ekvatorn.

- ★ **Longitud:** Den vinkelmässiga avståndet, öster eller väster från prime meridian till en given punkt på en sfär.

Att representera latituden från ekvatorn är enkelt eftersom det är en båge av en storcirkel. Longitud är däremot inte en båge av en storcirkel utan definieras istället som en vinkel mätt från polpunkten. Dessa definitioner kan ofta vara förvirrande inom sfärisk geometri, så det är enklare att förklara dem med hjälp av en figur.

I **Figur 2.3** visas två städer på Jorden. Det vinkelmässiga avståndet mellan städerna och ekvatorn är latituden, betecknad Φ . Därför är det vinkelmässiga avståndet mellan städerna och Nordpolen $90^\circ - \Phi$. Dessutom är skillnaden i longituderna λ viktig för att bestämma avståndet mellan två punkter på Jorden. Denna longitudskillnad mäts som en vinkel vid Nordpolen (punkt P), som visas i figuren.

Det vinkelmässiga avståndet mellan två städer, betecknat θ , kan bestämmas genom att tillämpa



Figur 2.3: Representation av två städer på Jorden

cosinuslagen på den sfäriska triangel som bildas av städerna. Formeln ges av:

$$\cos(\theta) = \cos(90^\circ - \phi_1) \cos(90^\circ - \phi_2) + \sin(90^\circ - \phi_1) \sin(90^\circ - \phi_2) \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$$

Genom att förenkla cosinustermerna får vi:

$$\cos(\theta) = \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) + \cos(\phi_1) \cos(\phi_2) \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$$

Där:

- ★ ϕ_1, ϕ_2 är latituderna för de två städerna.
- ★ λ_1, λ_2 är longituderna för de två städerna.
- ★ θ är den centrala vinkeln mellan de två städerna.

För att konvertera detta vinkelmässiga avstånd till ett fysiskt avstånd (t.ex. kilometer), multiplicera den centrala vinkeln θ , uttryckt i radianer, med jordens radie. Formeln för det fysiska avståndet d blir då

$$d = R \times \theta,$$

där R är jordens radie (6378 km).

2.4 Himmelsfären

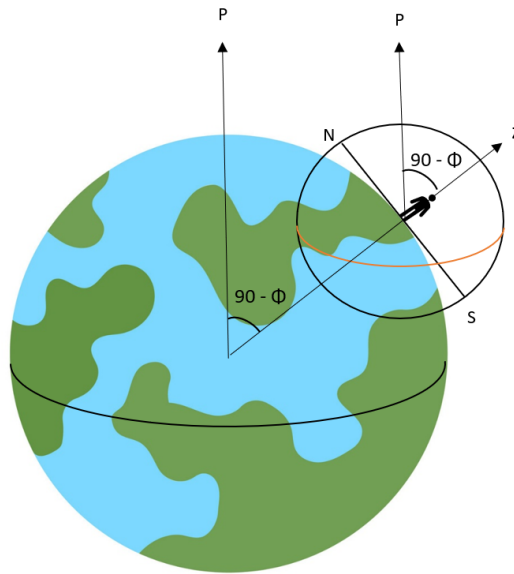
Inom astronomi föreställer man sig ofta himlen som en enorm sfär som omger Jorden, känd som **himmelssfären**. Punkter på himmelssfären motsvarar stjärnor, planeter och andra objekt på himlen. Denna modell hjälper oss att visualisera himmelska koordinater och navigera på natt-himlen.

Betrakta en person som står någonstans på Jorden, som avbildas i Figur 2.4. Vi benämner jordens nordpol som P, och antar att nordpolen är en riktning i rymden, representerad av en vektor. Dessutom uppfattar vår person en horisont, avbildad som en linje som inkluderar de norra (N) och södra (S) punkterna som riktningar mot norr och söder på Jorden. Men dessa riktningar skiljer sig från riktningen mot den nordliga polen (P) på himlen, eftersom de är från observatörens perspektiv.

Om vi betraktar en parallell riktning till P från observatören kan vi definiera punkten P på den himmelska sfären för observatören. Observera att på den himmelska sfären spelar endast riktningarna roll. Sfärens radie påverkar inte definitionen, och det antas normalt vara oändligt. För representations skull kommer vi att betrakta en liten radie här.

Nu, betrakta jordens ekvator. Om vi tar en parallell storcirkel (representerad med orange färg) på himmelssfären, kan vi definiera **himmelsekvatorn**. Vinkeln mellan riktningen mot jordens nordpol och observatören är $90^\circ - \text{latituden } (\Phi)$ för observatören. Som visas i figuren definierar detta en motsvarande vinkel på himmelssfären. Riktningen som pekar uppåt på himlen för observatören är betecknad som **z (zenit)**.

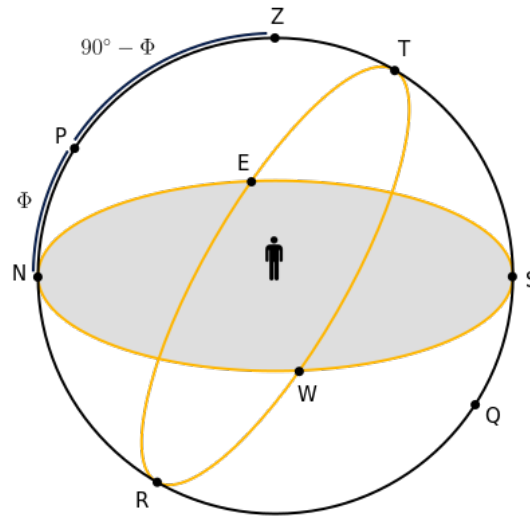
Nu tar vi bort Jorden och betraktar endast den himmelska sfären, roterar den så att obser-



Figur 2.4: <https://www.vectorstock.com/royalty-free-vector/planet-color-icon-earth-symbol-world-sign-vector-45684759>

vatören står vertikalt och **z** pekar uppåt. Detta ger oss bilden i Figur 2.5. I denna vy visas himmelsekvatorn och punkterna N, S, P och **z**. Det finns ytterligare punkter som används för att beskriva himlen. De första och enklaste är Öst (E) och Väst (W) punkterna, belägna på horison-

ten. Intressant nog är de vid skärningen mellan himmelsekvatorn och horisontcirkeln. Vi har också punkten Q, som är belägen i motsatt riktning mot punkt P. Slutligen definierar vi punkterna R och T som de nedre och övre punkterna på himmelsekvatorn. Latitudvinkeln är också representerad i bilden.



Figur 2.5: Viktiga punkter på himmelssfären.

Nedan finner du formella och mer precisa definitioner av dessa punkter:

- ★ **N** — riktningen mot norr på horisonten, enligt en kompass.
- ★ **S** — riktningen mot söder på horisonten, enligt en kompass.
- ★ **P (Norra himmelspolen):** Detta är punkten på himmelssfären som ligger direkt ovanför jordens nordpol. Den markerar den nordligaste punkten på himlen och är den punkt som alla stjärnor på norra halvklotet verkar rotera runt. Norra himmelspolen ligger mycket nära stjärnan Polaris, som vanligtvis kallas Polstjärnan. Det är en fast punkt, och dess höjd över horisonten är lika med observatörens latitud på norra halvklotet.
- ★ **Q (Södra himmelspolen):** Detta är punkten direkt ovanför jordens sydpol på himmelssfären. Den ligger mitt emot norra himmelspolen. Södra himmelspolen är inte synlig från norra halvklotet men kan ses från södra halvklotet.
- ★ **Z (Zenit):** Zenit är punkten på himlen som ligger rakt ovanför observatören. Den representerar den "högstapunkten" på himmelssfären sett från en observatörs perspektiv. Höjden av zenit över horisonten är alltid 90° för varje observatör.
- ★ **Ekvator (Himmelsekvatorn):** Himmelsekvatorn är projektionen av jordens ekvator på himmelssfären. Den delar himmelssfären i norra och södra halvklotet, precis som jordens ekvator delar planeten i en nordlig och en sydlig halva. Himmelsekvatorn skär himmelsmeridianerna i rätta vinklar. Ekvatorn är en imaginär cirkel som sträcker sig runt hela himlen, och stjärnor som befinner sig längs den går upp och ner exakt i öster och väster.
- ★ **E (Öst):** Punkten på himmelssfären där himmelsekvatorn skär horisontcirkeln i östlig riktning och markerar horisontens östligaste punkt.

- ★ **W (Väst):** Punkten på himmelsfären där himmelsekvatorn skär horisontcirkeln i västlig riktning och markerar horisontens västligaste punkt.
- ★ **R och T (Översta och Nedersta Punkten av Himmelsekvatorn)** — Dessa punkter har ingen särskild betydelse; de representerar helt enkelt den högsta (längst ovanför horisonten) och den lägsta (längst under horisonten) positionen av himmelsekvatorn.

3 Rymdkoordinater

Det finns flera olika koordinatsystem som astronomer använder. Alla dessa har olika syften och användningsområden och det är därför bra att ha koll på alla. När vi studerar stjärnhimlen brukar vi göra det enkelt för oss själva och se universum som geocentriskt vilket leder oss till att använda himmelssfären för våra system. Centralt för dessa system är att vi definierar den så kallade **ekliptikan** vilket är den bana på stjärnhimlen som solen tar under ett år, vilket också är den ungefärliga banan alla planeter tar över himlen. Denna linjen är i $23,5^\circ$ vinkel mot himmelsekvatorn och korsar i två punkter, **höstdagjämningspunkten** och **vårdagjämningspunkten**, vilket är där solen befinner sig under höstdagjämning respektive vårdagjämning.

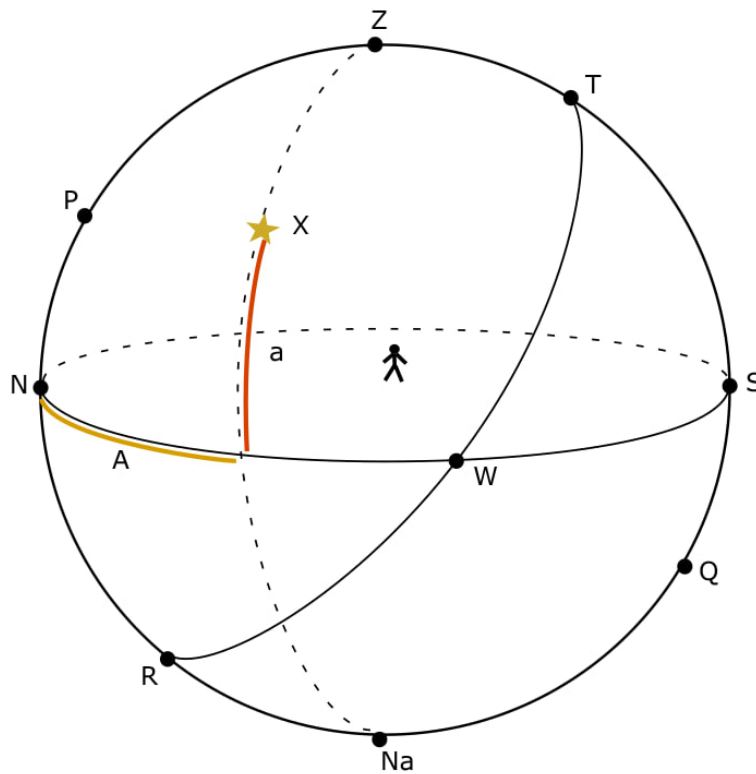
3.1 Alt-azimut

Detta är kanske det mest intuitiva systemet och utgår mycket från hur vi ser saker från jorden. Systemet utgår från hur stjärnhimlen ser från observatörens håll. Vi behöver två koordinataxlar för att beskriva himlen. Den första drar vi jämte horisonten från rakt norr. Denna koordinaten kallar vi **azimut** - A - och är i typ vilket väderstreck stjärnan ligger men anges i grader från norr. Nästa koordinataxel drar vi rakt uppåt från horisonten och kallar för **höjd/altitud** - a . Altituden är hur många grader över eller under horisonten stjärnan ligger. Över horisonten ger positiv altitud medan under horisonten ger negativ altitud. Alltså

- ★ **Höjd/altitud** är den vinkelräta avståndet från objektet till horisonten: negativt nedanför och positivt ovanför. Vid horisonten är $a = 0^\circ$, och vid zenit (rakt ovanför) är $a = 90^\circ$. Höjden kan inte överstiga 90 grader.
- ★ **Azimut** är den vinkelräta avståndet från norr längs horisonten, mätt medurs, och sträcker sig från 0° till 360° . Till exempel:
 - Norr (N) har $A = 0^\circ$
 - Öst (E) har $A = 90^\circ$
 - Syd (S) har $A = 180^\circ$
 - Väst (W) har $A = 270^\circ$

Vissa system kan definiera azimut moturs från öst (t.ex. $A = -90^\circ$ för öst).

Även om dessa definitioner kan verka komplexa, gör en visualisering på en sfär, som visas i Figur 2.6, allt mycket tydligare.



Figur 2.6: Representation av Höjd och Azimut system

Alt-azimut systemet är ett bra system för att ange hur teleskop ska riktas för att finna rätt stjärna utifrån väderstrecken. Problemet är att på grund av jordens rotation så ändras stjärnornas koordinater väldigt snabbt och eftersom jorden är rund så kommer observatörer på olika platser få olika koordinater för samma stjärna vid samma tid.

3.2 Ekvatoriellt (lokalt)

Det **Ekvatoriella (lokala)** koordinatsystemet är baserat på den himmelska ekvatorn och utgör ett steg mot det **Ekvatoriella (sideriska)** koordinatsystemet, som är oberoende av observatörens plats och tid. Jämfört med Alt-Azimut-koordinatsystemet, där koordinaterna snabbt förändras med tid och plats, erbjuder det lokala ekvatoriella systemet en mer stabil referensram. Det används ofta som ett mellanled för att överföra information från Alt-Azimut till det sideriska systemet.

Detta system kräver två vinklar: ****Tidsvinkel (H)**** och ****Deklination (Dec eller δ)****.

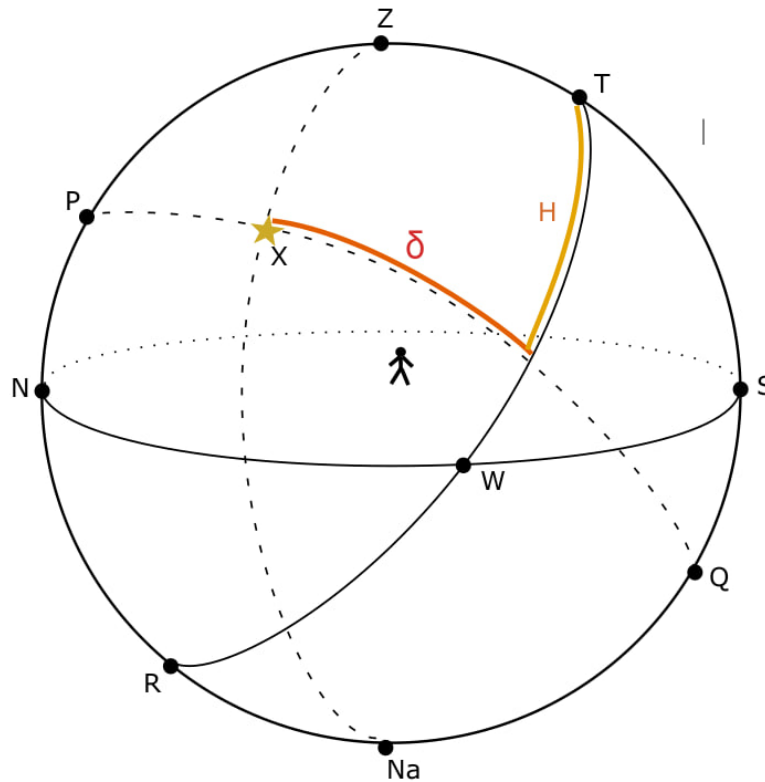
★ **Tidsvinkel (H)** är som longitud men på himlen. Den mäts längs den himmelska ekvatorn, med start från punkten *T* (den högsta punkten på den himmelska ekvatorn) och rör sig mot väster. Eftersom alla objekt roterar parallellt med ekvatorn, representerar denna vinkel tiden. Till exempel vid punkt *T* är $H = 0^\circ$. Punkten *W* har $H = 90^\circ$, och punkten *E* kan ha $H = -90^\circ$ eller $H = 270^\circ$ (vi föredrar $H = -90^\circ$).

★ **Deklination (Dec eller δ)** är analog med höjd, men den definieras från den himmelska ekvatorn. När man rör sig norrut ökar deklinationen, och när man rör sig söderut minskar den. Till exempel:

Vid punkt *P*, $\delta = 90^\circ$ och vid punkt *Q*, $\delta = -90^\circ$

En punkt på den himmelska ekvatorn har $\delta = 0^\circ$.

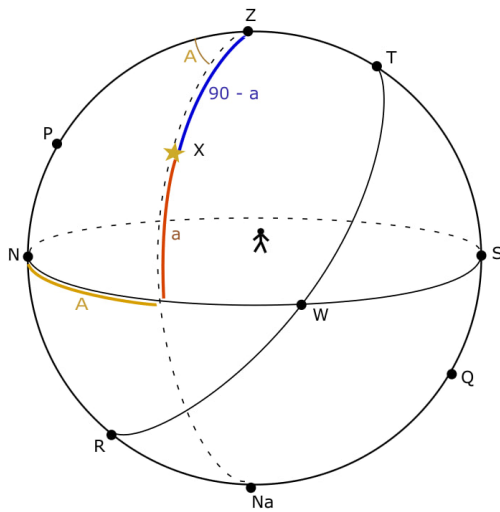
För bättre förståelse, se illustrationerna i Figur 2.7.



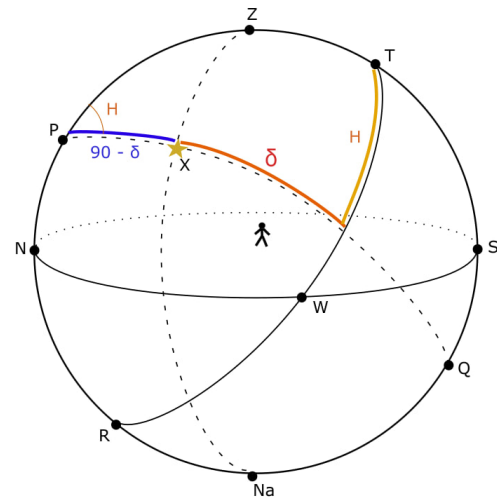
Figur 2.7: Illustration av det Ekvatoriellt (lokalt) Koordinatsystemet

3.3 Transformation mellan Alt-Azimut och Ekvatoriellt (lokalt)

För att utföra transformationen mellan Alt-Azimut och Ekvatoriellt (lokalt) är det första steget att identifiera de motsvarande vinklarna. Genom att tillämpa geometriska principer kan vi härleda dessa vinklar, som är avgörande för konverteringen. Dessa vinklar visas i Figur 2.10



Figur 2.8: Alt-Azimuth Koordinatsystem

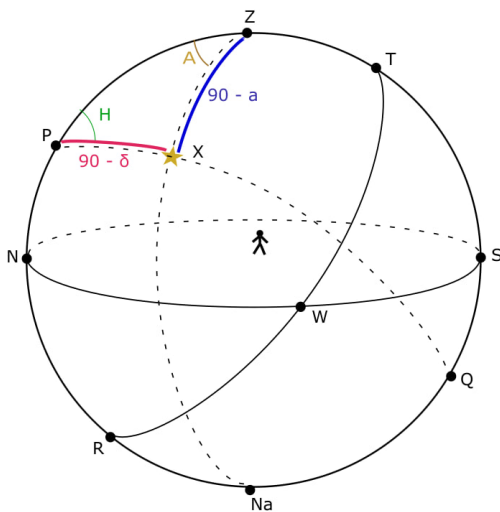


Figur 2.9: Ekvatoriskt (lokalt)

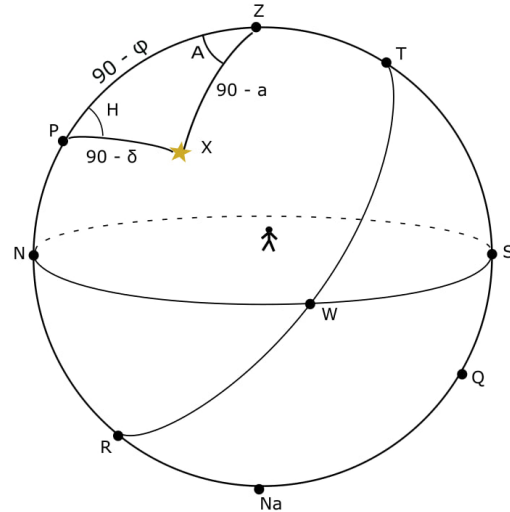
Figur 2.10: Motsvarande vinklar

I sfärisk geometri är en av de viktigaste triangelarna **PZX triangeln**, där Z representerar objektet eller stjärnan vi observerar. Denna triangel är avgörande för att transformera mellan koordinatsystem.

De vinklar och den information vi behöver kan alla samlas i denna triangel, som visas i figuren nedan:



Figur 2.11: Första illustration av PZX triangeln.



Figur 2.12: Andra illustration av PZX triangeln.

Figur 2.13: PZX Triangeln i Sfärisk Geometri.

Som man kan se i figurerna spelar **breddgrad** även en roll i denna triangel. Genom att använda **cosinus**- och **sinus**-satserna kan vi utföra de nödvändiga transformationerna mellan de två koordinatsystemen.

I sfärisk geometri, om du får några tre komponenter av en triangel (såsom vinklar eller sidlängder), kan du hitta de återstående okända. Till exempel: - Om du vet Deklination (δ), Breddgrad (ϕ) och Tidsvinkel (H), kan du beräkna Azimut (A) och Höjd (a).

- Alternativt, genom att känna till Höjd (a), Tidsvinkel (H) och Deklination (δ), kan du beräkna Breddgrad (ϕ) och Azimut (A).

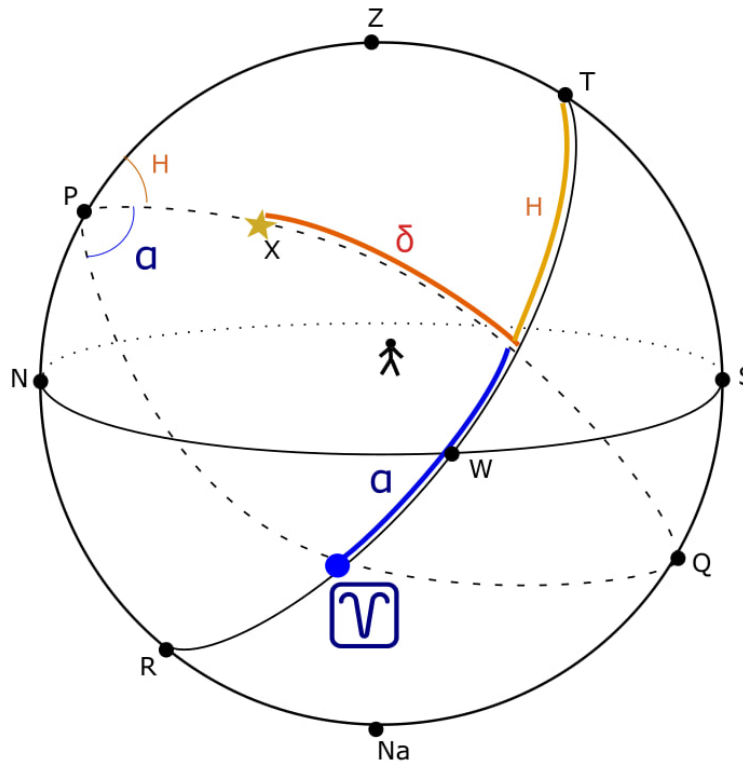
Denna relation gör det möjligt att omvandla mellan olika koordinatsystem baserat på den tillgängliga informationen.

3.4 Ekvatoriellt (Sideriskt)

Det finns en viktig punkt på himmelsekvatorn kallad **vårdagjämningspunkten**. Denna punkt brukar symboliseras med Υ , som representerar det första stjärntecknet i zodiaken, Väduren. Vårdagjämningspunkten markerar positionen i himlen (i stjärntecknet Väduren) där solen observeras vid början av våren. Det är också en av två tillfällen då solen korsar himmelsekvatorn. Därav är vårdagjämningspunkten en betydande punkt på himlen.

I det **Ekvatoriella (Sideriska)** koordinatsystemet förblir **deklinationen** (δ) som innan, medan tidsvinkel förkastas. Vi introducerar istället en mer generell koordinat: **rektascension** (α), vilket är vinkeln, mätt moturs, längs himmelsekvatorn relativt vårdagjämningspunkten Υ . Rektascension är analogt med tidsvinkeln, men med vissa skillnader.

Under ett dygn kommer vårdagjämningspunkten att röra sig längs himmelsekvatorn relativt observatören på grund av jordrotationen. Genom att veta tiden på dygnet kan vi bestämma vårdagjämningspunktens position och som följd beräkna värdet av rektascension (α). Detta koordinatsystem representeras tydligare i Figur 2.14

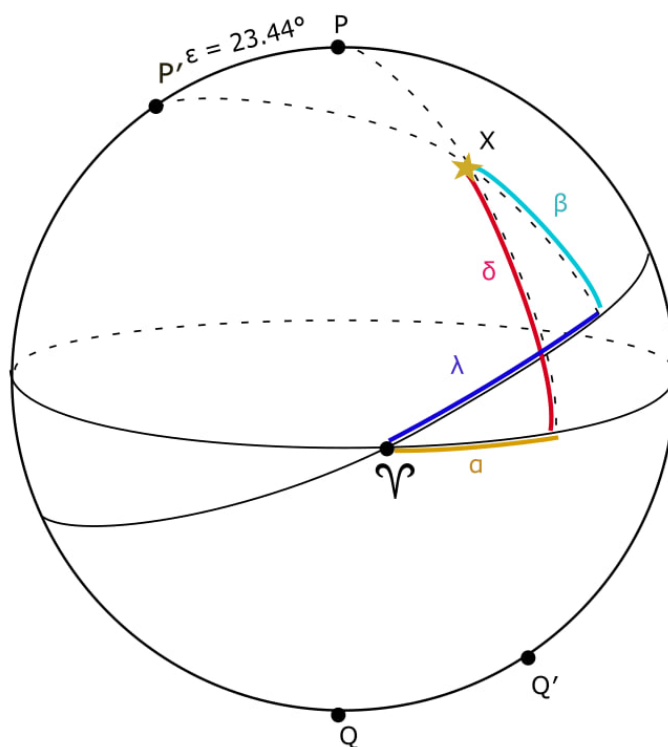


Figur 2.14: Illustration av rektascension (α) med avseende på vårdagjämningspunkten.

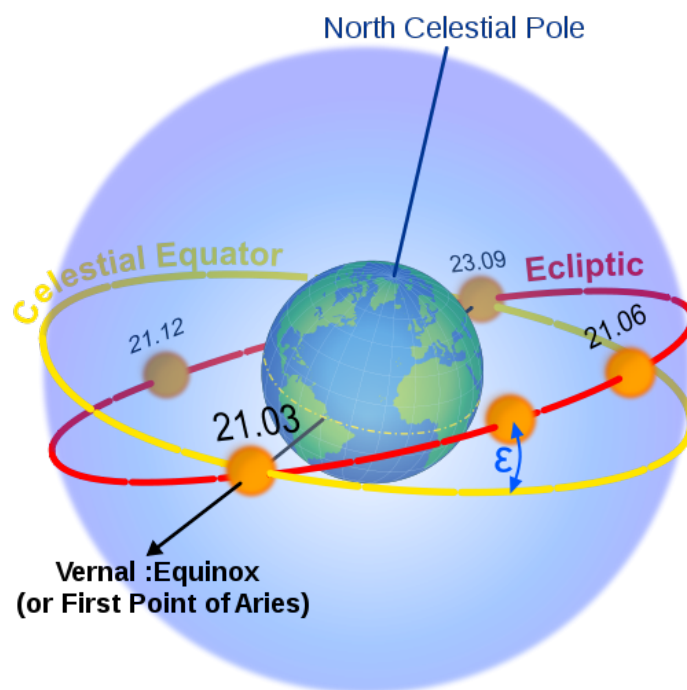
3.5 Ekliptiska koordinatsystemet

Det **ekliptiska koordinatsystemet** är baserat på planet som jorden rör sig i omkring solen, kallat **ekliptikans plan**. Vägen solen tillryggalägger under ett år ligger i detta plan, och vinkeln mellan ekliptikans plan och himmelsekvatorn, kallad jordens **oblikvit**, är ungefär $\epsilon = 23,44^\circ$. Detta koordinatsystem är ofta visad tillsammans med himmelsekvatorn.

Liknande det ekvatoriella koordinatsystemet använder det ekliptiska systemet två koordinater: **ekliptisk longitud** (λ) och **ekliptisk latitud** (β). Dessa koordinater beskriver positionen av himmelska objekt relativt ekliptikan. Diagrammet i Figur 2.16 illustrerar dessa koncept i mer detalj.

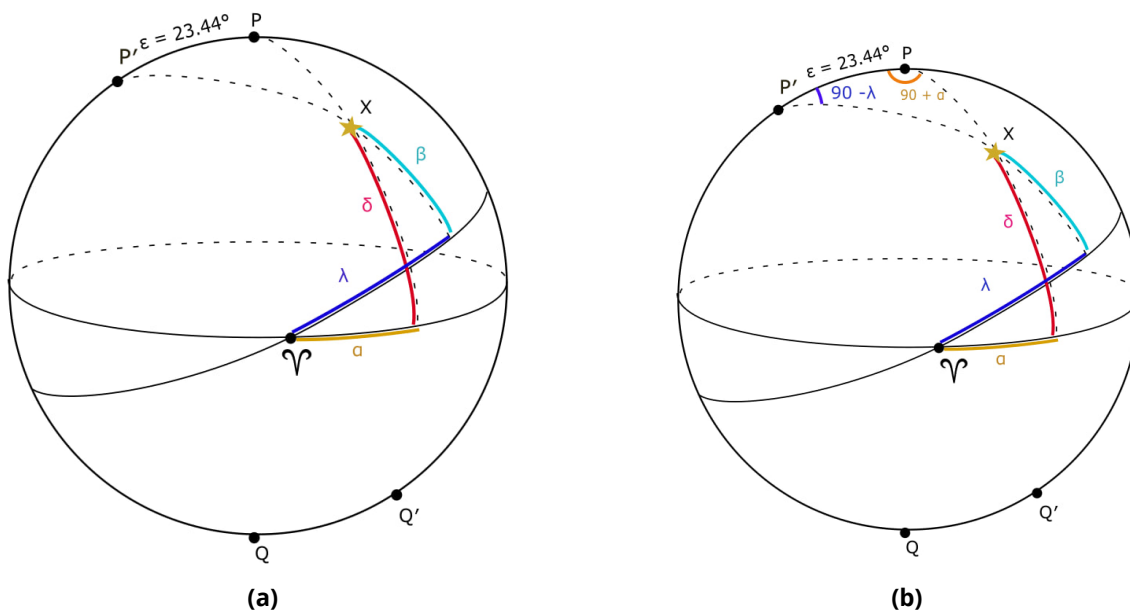


Figur 2.15: Ekliptiska koordinatsystemet



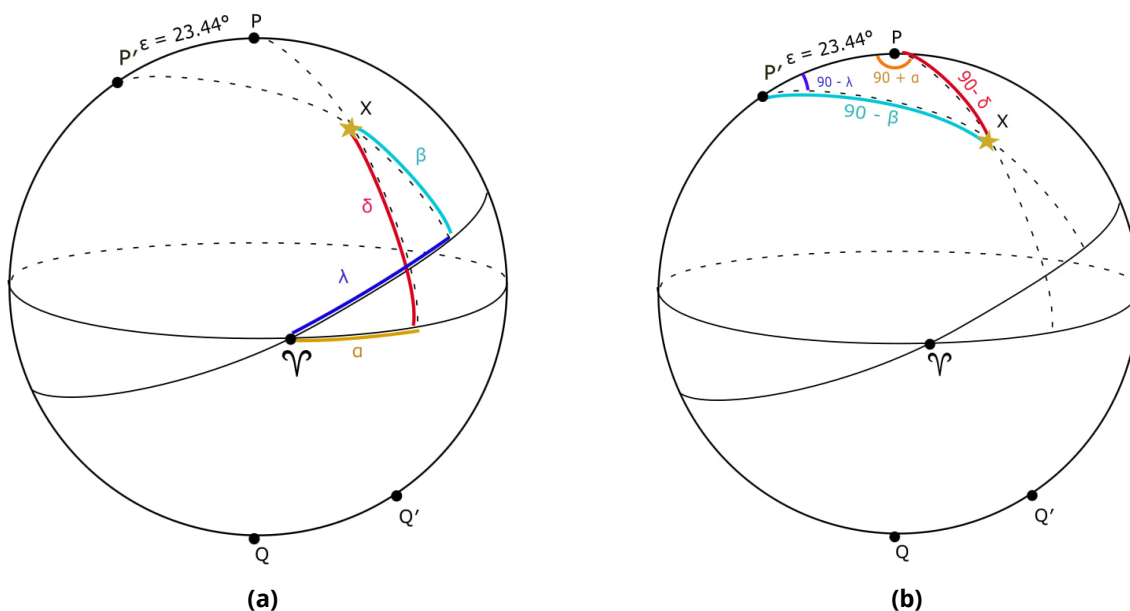
Figur 2.16: Ekliptiska koordinatsystemet

För att transformera mellan det ekliptiska- och ekvatoriella koordinatsystemet använder vi oss av en rad transformationer som visas i Figur 2.17. Dessa transformationer är nödvändiga eftersom koordinatsystemen är definierade kring olika referensplan: ekliptikan (där jordens omloppsbana befinner sig i) och himmelsekvatorn (som har en lutning till ekliptikan motsvarande jordens oblikvit).



Figur 2.17: Ekliptiska koordinatsystemet, korresponderande vinklar

Denna transformation är ytterligare illustrerad i Figur 2.18, där vi visar den korresponderande sfäriska triangeln skapad av transformationsprocessen. Den geometriska relationen mellan koordinaterna i det ekliptiska- och ekvatoriella systemet är nyckeln till en förståelse av hur koordinaterna i systemen förhåller sig till varandra.



Figur 2.18: Ekliptiska koordinatsystemet, korresponderande vinklar

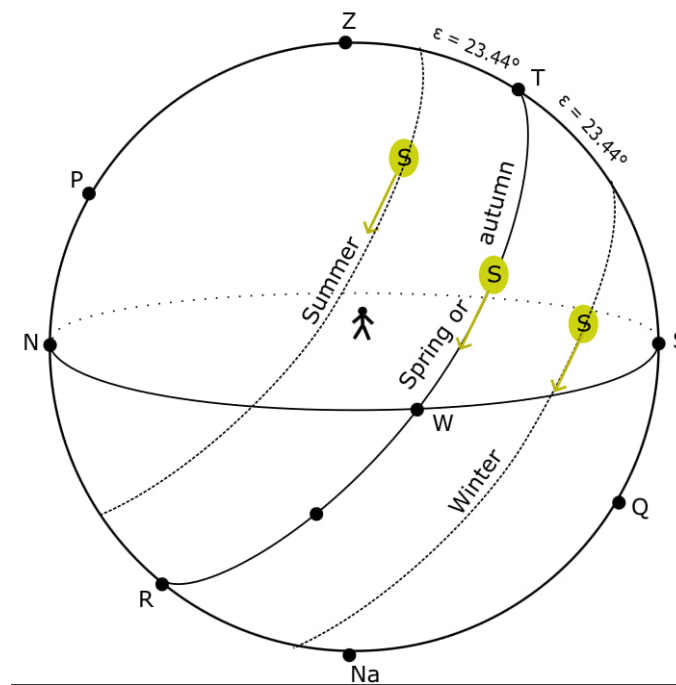
Nu kan vi skriva olika ekvationer för den sfäriska triangeln vi har skapat. Dessa ekvationer tenderar att bli ganska långa. I nästa avsnitt tar vi och betraktar solen i det ekliptiska koordinat-

systemet, vilket leder till många förenklingar.

3.6 Solen på sfären

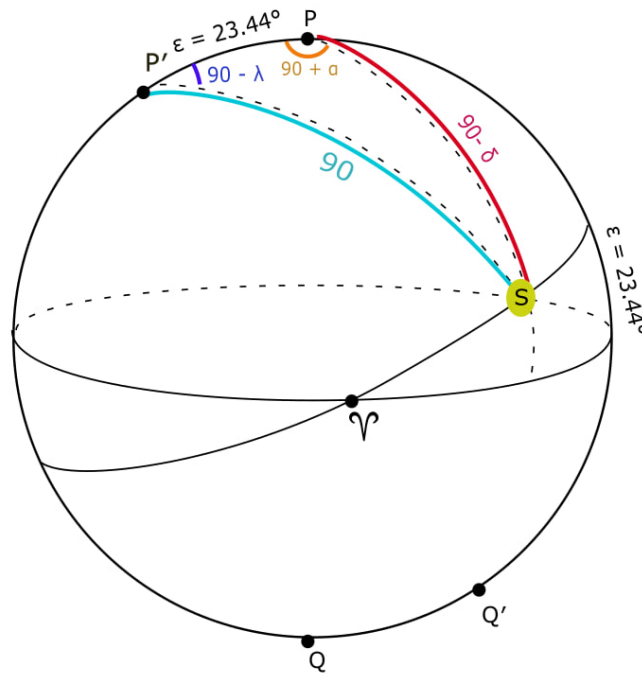
Solen rör sig längs ekliptikan. Detta innebär att vid början av våren, kring **20 mars**, befinner sig solen vid **vårdagjämningspunkten**. Vid början av sommaren (på norra halvklotet), kring **21 juni**, befinner sig solen vid sitt maximala vinkelavstånd över himmelsekvatorn, cirka 23.44° , som kallas **sommarsolståndet**. Vid början av hösten, kring **23 september**, befinner sig återigen solen på himmelsekvatorn i **höstdagjämningspunkten**. Vid början av vintern, kring **21 december**, är solen 23.44° under himmelsekvatorn, vilket kallas **vintersolståndet**.

Solen kan approximeras till att ha samma deklination under ett dygn, vilket innebär att den förflyttar sig parallellt med ekvatorn. Denna dygnsrörelse är visad i Figur 2.19.



Figur 2.19: Solens rörelse under ett dygn för olika årstider

Låt oss nu gå tillbaka till det ekliptiska koordinatsystemet och representera solen med hjälp av detta. Då solen ligger i ekliptikan blir dess ekliptiska latitud $\beta_{\text{sun}} = 0^\circ$. Detta visas i Figur 2.20.



Figur 2.20: Solens rörelse under ett dygn i det ekliptiska koordinatsystemet

Nu kan vi skriva några viktiga ekvationer som relaterar solens **rektascension** α , **ekliptiska longitud** λ , och **deklinat** δ . Bevisen av dessa lämnas åt läsaren:

$$\sin(\delta_{sun}) = \sin(\epsilon) \sin(\lambda_{sun})$$

$$\sin(\alpha_{sun}) = \frac{\tan(\delta_{sun})}{\tan(\epsilon)}$$

Här är λ starkt kopplad till tiden på året, och vi kan beräkna det som sådan:

$$\lambda(t) \approx \frac{360}{365.25} \cdot N$$

N är antalet dagar sedan vårdagjämningen (20 eller 21 mars). Detta räknas ut som:

$$N = \text{Dagens datum} - \text{Vårdagjämningens datum}$$

3.7 Mer om ekvatoriskt, J2000

J2000 är ett ekvatoriskt koordinatsystem med axlarna deklination (som ni känner igen) och **rektascension**. Rektascensionen är som timvinkeln utom att den utgår från vårdagjämningpunkten (alltså punkten där ekliptikan och himmelsekvatorn korsar) och är därför samma för alla observatörer. Rektascensionen går motsols samt mäts i timmar, minuter och sekunder. ett helt varv av rektascension är ett sideriskt dygn på 23h 56m 4,09s. **Notera!** En bågsekund deklination är inte samma avstånd som en sekund rektascension!

J2000 är standardkoordinatsystemet för astronomi och värt att lära sig. 2000 delen av namnet kommer från att man använder år 2000 som epok för att beräkna stjärnornas koordinater.

Eftersom norra himmelspolen rör sig över tid när jordens rotationsaxeln ändras så måste man välja vilket års position man ska använda, alltså vilken epok. Denna kommer behöva ändras i framtiden.

J2000 har en variant som är värd att hålla koll på, **ICRS**. Detta är samma som J2000 i allt utom att den använder sig av grader (360° för ett varv) istället för timmar, minuter och sekunder för rektascensionen. Gradera delas även ofta upp i decimaler istället för bågminuter och bågsekunder. Detta är det vanligaste systemet för datorer att använda.

3.8 Galaktiska koordinater

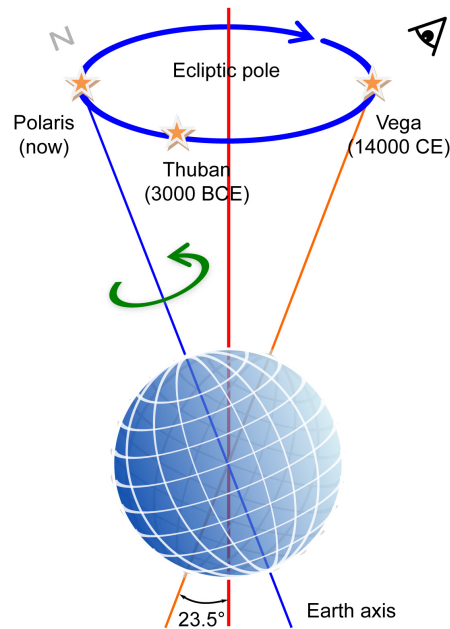
När man studerar vintergatan kan det vara användbart med ett annat koordinatsystem som är mer anpassat för situationen. Detta är galaktiska koordinater och utgår från galaxbandet på himlen. Den första koordinataxeln går jämte galaxbandet medsols från galaxens mitt och kallas **latitud**. Den andra axeln kallas **longitud** och mäter antalet grader över eller under galaxbandet. Båda dessa koordinater mäts i grader.

4 Himlavalvets förändring

Himlavalvet är i kontinuerlig förändring där planeter, månar och stjärnor rör sig över himlen, men även själva koordinatsystemet i sig förflyttar sig. Orsakerna och konsekvenserna av detta kommer vi ta upp här.

4.1 Precession

Jordens rotationsaxel har i dagsläget en lutning på ungefär $\epsilon = 23,44^\circ$. På grund av lutningen och det faktum att jorden är tillplattad (lite bredare vid ekvatorn än vid polerna) så kommer, primärt, solens och månens gravitationella dragning på jorden orsaka att jordaxeln roterar och bildar en kon. Denna effekt kallas **precession** och visas tydligare i Figur 2.21.



Figur 2.21: Precession av jordaxeln

Detta har som konsekvens att stjärnornas koordinater i det ekvatoriella- och det ekliptiska koordinatsystemet ändras med tiden. Till exempel kommer Vega en dag ersätta Polaris som polstjärna då den norra himmelpolen kommer att ha flyttat sig.

4.2 Egenrörelse

Stjärnor har själva en hastighet genom kosmos, men då de är så långt borta så märks inte det lika tydligt som exempelvis planeterna. Denna rörelse spelar dock roll med tiden. Man kan dela upp en stjärnas rörelse i två komponenter: **radiell hastighet**, v_r , och **tangentiell hastighet**, v_t .

Den radiella hastigheten är längs observatörens siktlinje och används främst vid bestämning av avstånd via dopplereffekten. Den tangentiella hastigheten är vinkelrät mot siktlinjen och denna kan skrivas om som vinkelhastighet och delas upp i två ytterligare komponenter: förändring av deklination, μ_δ , och förändring av rektascension, μ_α .

$$\mu = v_t / d$$

Där d är avståndet till stjärnan.

$$\mu = \sqrt{(\mu_\alpha \cos(\delta))^2 + \mu_\delta^2}$$

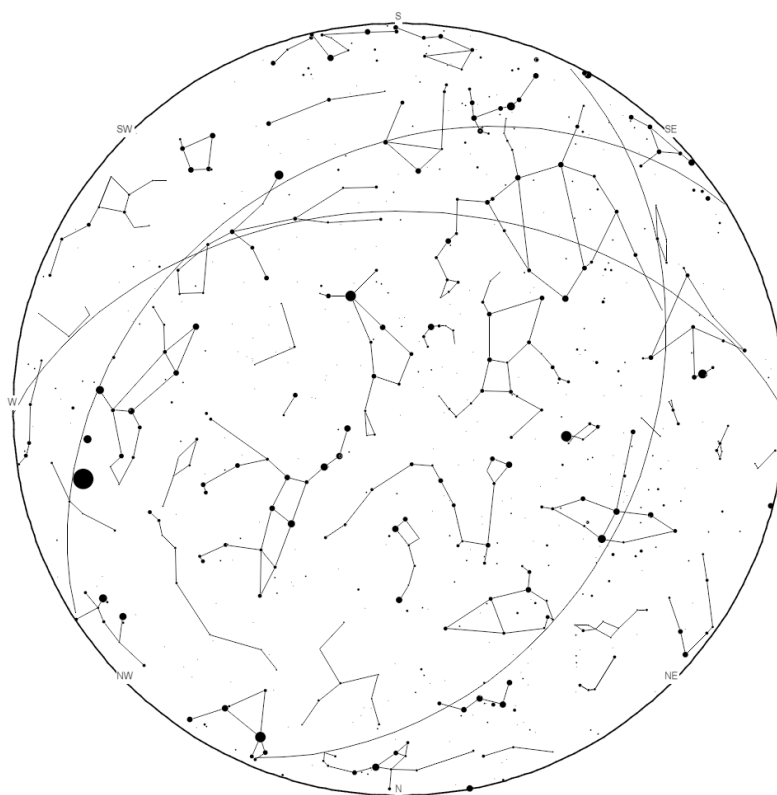
Där $\mu_\alpha \cos(\mu_\delta)$ motsvarar förändringen av rektascension av en stjärna med deklination δ . Med hjälp av detta kan man beräkna stjärnors totala hastighet:

$$\mu = \sqrt{v_r^2 + v_t^2}$$

På så vis kan vi veta medelhastigheten av stjärnor i vårt närområde.

5 Stjärnkartor

Stjärnkartor användas för att kartlägga himlen men används också ofta för problemlösning i både den svenska och internationella olympiaden. I en stjärnkarta brukar man sätta zenith (Z) i mitten



Figur 2.22: En stjärnkarta tagen i Stockholm 1/6 2025 kl. 00:00.

med kardinalriktningarna utsatta på kanterna (det som blir observatörens horisont)

6 Namnsättning

För att kunna diskutera hur stjärnhimlen ser ut och vad som finns där finns det regler för namngivning av astronomiska objekt.

6.1 Stjärnnamngivning

Enligt den Internationella Astronomiska Unionen (IAU) har stjärnhimlen delats in 88 stjärnbilder baserade på grekisk mytologi. Dessa har officiella gränser vilket betyder att varje stjärna kan associeras med en av dessa stjärnbilder som visar dess ungefärliga plats. För de starkaste stjärnorna på himlen brukar man använda **Bayer designering** för att namnge dem. I detta system börjar namnet med en liten grekisk bokstav följt av stjärnbildens namn på latin. Bokstaven designerar vilken stjärna i ordningen av ljusstarkast i stjärnbilden det är. För övriga stjärnor finns stjärnkataloger, ofta kopplade till specifika instrument, som GAIA-katalogen.

6.2 Kataloger

För allting som inte är stjärnor eller planeter på himlen finns kataloger. Dessa brukar innehålla nebulosor, galaxer och stjärnhopar men detta kan variera. Namngivning för dessa objekt är katalognamnet (eller förkortning) följt av objektets nummer.

Den kändaste av dessa kallas **Messier-katalogen**. Denna innehåller de allra största och ljusstarkaste objekten på himlen. Förkortningen för denna katalog är M och den har totalt 110 objekt. En något större och nyare katalog är **The New General Catalogue** som skrevs på 1800-talet. Förkortningen för denna är NGC och den innehåller 7840 objekt.

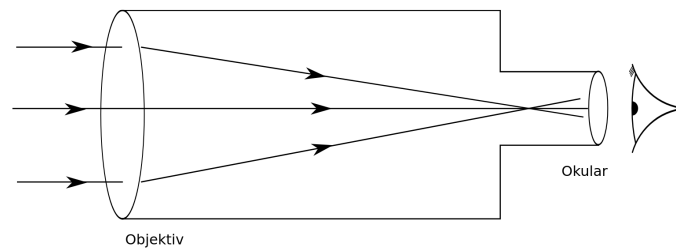
7 Teleskop

Teleskop är astronomens främsta verktyg när det kommer till observationer. Teleskop kommer i många olika former och alla har sina för och nackdelar men i grunden fungerar alla på samma sätt.

7.1 Optik

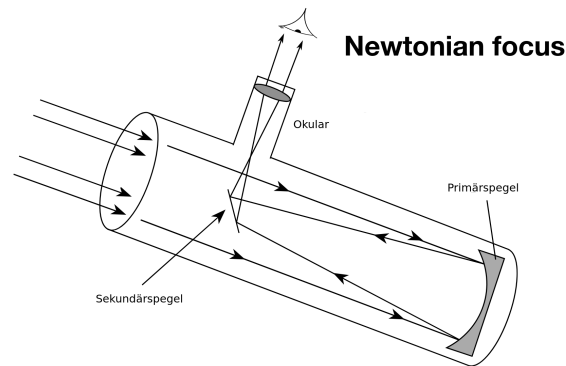
När vi gör observationer av objekt i rymden ligger dom så långt borta att vi kan approximera ljuset från objekten som parallella ljusstrålar, detta är viktigt för att förstå hur optiken i ett teleskop fungerar.

Teleskopets jobb är att ta ljus från en stor yta och koncentrera det på en liten yta, detta görs med en serie linser eller speglar. Teleskop som består av linser kallas för refraktorer och teleskop som använder sig av speglar kallas reflektorer. Alla teleskop består av ett objektiv och ett okular, dessa beskrivs ofta med en så kallad brännvidd och en fokallängd. Brännvidden är diametern på en ljusinsamlande öppningen och är mest relevant för objektivet och fokallängden är avståndet mellan öppningen och fokus eller den punkt där allt ljus samlas.



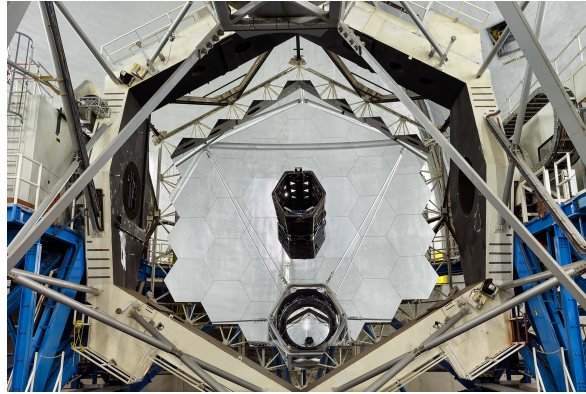
Figur 2.23: Schematisk bild av en refraktor. Linjerna visar ljusets väg i teleskopet.

I figuren ovan syns ett exempel på hur en refraktor kan se ut. Ljuset kommer in genom öppningen till höger där det bryts av en lins till fokus. Sedan bryter en lins i okularet ljuset igen så det träffar ögat återigen som parallella strålar och bilden kan återskapas på näthinnan. Den observante inser också att det man ser när man tittar genom ett teleskop kommer var upp och ner.



Figur 2.24: Schematisk bild över en refraktor. Linjerna visar ljusets väg i teleskopet.

Ovan syns en refraktor. Detta teleskop använder sig av paraboliska speglar för att uppnå samma effekt som refraktorn. Bilden visar en reflektor med så kallar newtonskt fokus detta innebär att det finns en sekundär spegel som är vinklad 45° och dirigerar ut ljuset genom sidan på objektivet där vi återigen hittar ett okular. Det finns ett antal olika fokus som används i reflektor teleskop newtonskt är ett av dom enklaste ett annat som är mycket vanlig syns i figuren nedan och är helt enkelt ett hål i primär spegeln så man kan dirigera ljuset vidare till stora tunga instrument.



Figur 2.25: Här ser vi primärspiegeln på ett av de två Keck teleskopen. Det finns ett rör mitt i där allt ljus från sekundärspiegel åker vidare till alla instrument nere i någon källare. Detta är ett så kallat Cassegrain fokus. [10]

7.2 Förstoring och upplösning

En viktig egenskap hos ett teleskop är hur mycket förstoring den ger. Detta är viktigt att veta så vi kan välja rätt utrustning för att observera olika objekt. När vi observerar med ett teleskop använder vi oss av ett objektiv och ett okular dessa har varsin fokallängd och för att få fram förstoringen för uppställningen dividerar vi dessa fokallängderna med varandra.

$$\frac{\text{fokallängd objektiv}}{\text{fokallängd okular}} = \text{förstoring} \quad (2.1)$$

När vi observerar så kan det finnas objekt på himlen som verkar ligga väldigt nära varandra. I vissa fall kan dessa objekt ligga så nära varandra att de verkar vara ett och samma objekt när dom observeras. Det finns en formel som beskriver hur små vinkelavstånd ett teleskop upplösa eller hur nära två stjärnor kan ligga varandra på himlen för att ett teleskop ska kunna urskilja dem. Formeln kallas för **Rayleigh kriteriet** och ser ut som

$$\Theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}. \quad (2.2)$$

I formeln ovan är λ våglängden av ljuset vi observerar i D är diametern på objektivet som används och Θ är det minsta vinkelavståndet teleskopet kan upplösa. Formeln antar små vinklar och faktorn 1.22 kommer från beräkningen av avståndet till första diffraktionsminimat, matematiskt kommer siffran från det första nollstället i första ordningens besselfunktion.

7.3 Synfält och ljusinsamling

En annan viktig egenskap hos ett teleskop är hur mycket ljus de samlar in. Denna ljusinsamlingsförmåga är proportionell mot öppningens area eller kvadraten av öppningens radie. Ett stort teleskop kan alltså både upplösa mindre vinkelavstånd och samlar in mer ljus vilket ger en tydligare bild.

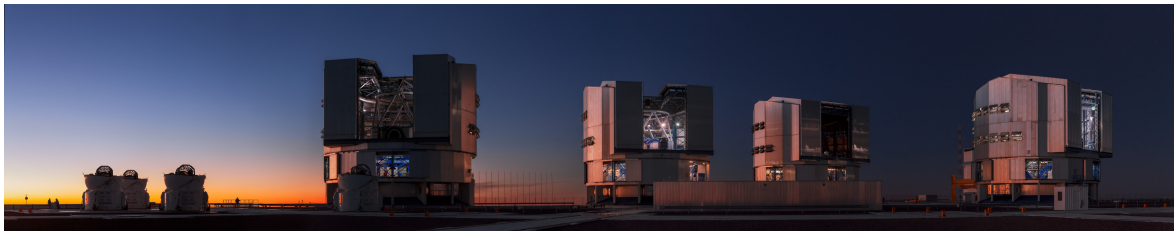
$$\text{Ljusinsamlingsförmåga} \propto R^2 \quad (2.3)$$

Synfältet för ett teleskop är hur stor del av himlen som syns genom teleskopet. Synfältet mäts i grader och beror på teleskopets förstoring och okularets synfält. Okularets synfält är en specifikation hos okularet och är givet av tillverkaren. För att få synfältet hos teleskopet dividerar vi okularets synfält med förstoringen hos teleskopet.

$$\frac{\text{Synfält}_{\text{okular}}}{\text{Förstoring}} = \text{Synfält} \quad (2.4)$$

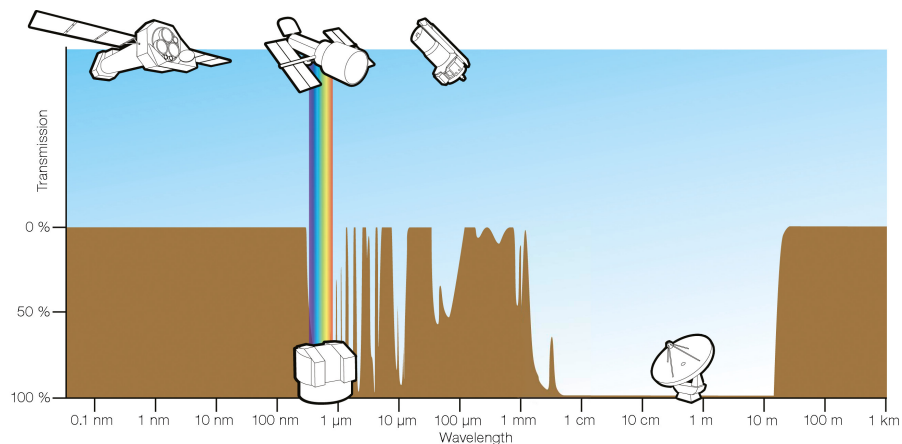
7.4 Seeing och rymdteleskop

En annan utmaning med teleskop är det som kallas för atmosfärisk seeing. Det är ett samlingsnamn för alla atmosfäriska effekter som påverkar observationer med markbaserade teleskop. Turbulens, temperaturskillnader och variation i kemisk uppbyggnad är alla saker som påverkar hur ljuset bryts när det färdas genom atmosfären och försämrar kvaliteten på de observationer man kan göra. En ideal plats för ett teleskop är därmed någonstans högt upp på en torr plats.



Figur 2.26: ESO's Paranal observatorie på den högsta punkten i Atacama öknen i Chile. [4]

Ett sätt att komma runt det där med seeing så kan man skjuta upp teleskopet i rymden och därmed undvika atmosfären helt. Rymdteleskop slipper alltså helt de nackdelar som finns med markbaserade teleskop. För vissa observationer är det till och med nödvändigt att observera från rymden då atmosfären inte släpper igenom alla våglängder.



Figur 2.27: Här ser vi atmosfärens genomskinlighet för olika våglängder.[5]

Dock så är markbaserade teleskop fortfarande mycket viktiga för forskning då det är ekonomiskt orealistiskt att skicka upp teleskop i rymden av samma storlek som dom vi kan bygga på marken.

8 Uppgifter

- 2.1** Consider someone who wants to fly from New York (40°N, 75°W) to Gothenburg (57°N, 12°E). What would be the great-circle distance they would travel, assuming Earth's radius is 6371 km?
- 2.2** draw the PZX triangle with all the angles.
- 2.3** Consider someone who wants to travel from Paris (48°N, 2°E) to Sydney (34°S, 151°E). What would be the great-circle distance they would cover, assuming Earth's radius is 6371 km?
- 2.4** The star Betelgeuse has a declination of $\delta = 7^\circ$ and its current hour angle is $H = 60^\circ$. Consider an observer in Stockholm, Sweden (latitude $\phi = 59^\circ$ North). How much above the horizon is Betelgeuse at this moment (its Altitude)?
- 2.5** The star Sirius has a declination of $\delta = -17^\circ$. An observer in Copenhagen, Denmark (latitude $\phi = 55^\circ$ North) notices that Sirius is just rising above the horizon. What is the hour angle of Sirius at the moment it rises?
- 2.6** At latitude $\phi = 45^\circ$ N, the star **Vega** ($\delta = +39^\circ$, $\alpha = 18^h36^m56^s$) is just rising on the eastern horizon.
Alex wants to know in which direction he should look to see it's rising. Calculate its azimuth A , measured eastward from true north, at the moment of rising (altitude $h = 0$).
- 2.7** At the beginning of spring, on **March 20th**, in **Paris, France**, a stick of length 1 meter is placed horizontally on the ground. At noon, the Sun is not directly overhead. Instead, it forms an angle with the horizon based on the location's latitude and the time of year. Calculate the length of the shadow cast by the stick at noon on this date. Assume that the stick is vertical and that the angle of elevation of the Sun is based on the latitude of Paris (approximately 48° North) and the solar declination at the vernal equinox (which is 0°).
- 2.8** On the **Vernal Equinox** (March 20th), in **Madrid, Spain**, Aria (1.8 meters tall) stands upright on the ground. At **12:00 PM**, Aria observes the shortest shadow. As the afternoon progresses, the shadow gets longer.
Calculate the length of Aria's shadow at **3:00 PM**. Assume the latitude of Madrid is 40°.
- 2.9** On a certain day during **spring**, Sarah notices the Sun positioned at an angle above the horizon. She wonders about the Sun's declination on this day.
If the Sun's declination is approximately **10°**, what time of year is it likely to be?
- 2.10** On **May 1st**, Victor mounts his camera on a tripod to capture the Sun's path at local noon. Curious about how far north of the celestial equator the Sun appears, he asks you to find the Sun's declination on that date.
- 2.11** Prove the following relations for the sun:
- $$\sin(\delta_{sun}) = \sin(\epsilon) \sin(\lambda_{sun})$$
- $$\sin(\alpha_{sun}) = \frac{\tan(\delta_{sun})}{\tan(\epsilon)}$$
- 2.12 Anders på jorden** (Final 2024) Anders står på norra halvklotet och lade märke till att längden hos den kortaste skuggan för en 1,00 m lång vertikal stång en dag var 1,83 m och att den längsta skuggan samma dag var 9,99 m. Beräkna latituden för observatören och solens deklination denna dag.
- 2.13** (Final 2023) Hur lång tid tar en soluppgång på Nordpolen om soluppgången definieras från när någon del av solen blir synlig över horisonten tills hela solen är synlig? Försumma atmosfärens brytning. Jordens axellutning är 23,4°.
- 2.14** (Final 2023) En katt vid namn Schrödinger på norra halvklotet märkte att längden på den kortaste skuggan från en 1.000 m lång vertikal pinne under en viss dag var $l_{min} = 1.732$ m, och att samma pinne på samma dag hade en maximal skugglängd på 5.671 m. Bestäm latituden Schrödinger

befinner sig på, samt solens deklination på den dagen. Solen kan modelleras som en punktkälla och du kan försumma atmosfäriska effekter.

2.15 Hugo och teleskopet (Final 2024) För ett ickeroterande oladdat svart hål kan man bestämma dess Hawkingstrålning. Detta motsvarar avdunstningen av ett svart hål och kan approximeras som svartkroppsstrålning. I verkligheten kan även andra typer av partiklar strålas ut, men för enkelhetens skull antar vi att strålningen endast består av fotoner. Hawkingtemperaturen för strålningen ges enligt

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}.$$

Hugo observerar ett svart hål med sitt teleskop. Det svarta hålet har massan $M = 10^{11}$ kg. Det svarta hålet befinner sig på ett avstånd 0,1 Mpc. I många fall väljer man i fysik att skriva $\hbar$, vilket är ett alternativt sätt att skriva $\frac{h}{2\pi}$.

- (a) Bestäm vilken diameter på Hugos teleskop som krävs för att han skall kunna observera det svarta hålets Hawkingstrålning. Antag att Hugo kan uppfatta alla våglängder på hela spektrumet och att gränsmagnituden för ett teleskop beror på dess diameter (i meter) genom

$$m = 16,77 + 5 \log D.$$

- (b) Bestäm det svarta hålets resterande livstid t om det svarta hålet håller en konstant Hawkingstrålning på $P = \frac{E}{t}$.

2.16 (Final 2023) I magnetuset finns ett reflektorteleskop med 10 tums diameter spegel, F-tal $f/10$, och brännvidd 2500 mm. Bestäm om en människa kan urskilja Jupiters röda fläck (vilken har diameter $2,6D_{\oplus}$) med det teleskopet, när den använder ett okular med 25mm brännvidd. Bortse från atmosfäriska störningar, och anta att Jupiter och Jorden ligger som närmast.

Kapitel 3

Banmekanik

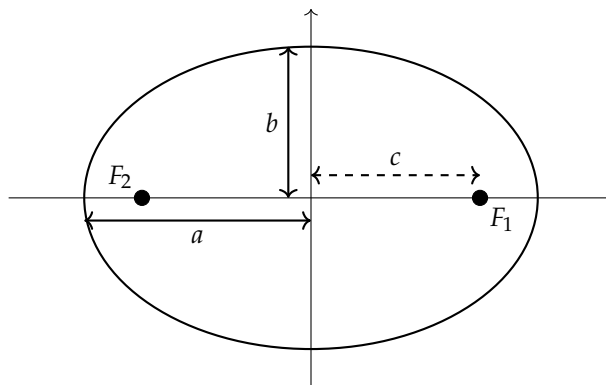
1 Keplers lagar

Före Newton fanns en skäggig gubbe som hette Johannes Kepler. Han tittade på planeterna och fann 3 samband som beskrev deras rörelse över himmeln. Dessa reviderades sedan av Newton till att gälla allmänt för alla himlakroppar och är nu grunden till hur vi beräknar omloppsbanor.

1.1 Keplers första lag

"Planetbanorna är ellipser med stjärnan i den ena brännpunkten."
- Wikipedia

Mer allmänt: två objekt som påverkar varandra gravitationellt kommer åka i omloppsbanor kring deras gemensamma masscentrum. Dessa banor kommer vara ellipser med masscentrumet i en av brännpunkterna.



Figur 3.1: hur brännpunkter och axlar ser ut i en ellips. Den mest användbara att komma ihåg är halva storaxeln a (semimajor axis).

Ellipsen definieras av a , b och c . a , eller **halva storaxeln**, är den som används oftast. Ofta beskriver man ellipser med dess **excentricitet** e som ett mått på hur avlång den är. Detta beräknas som

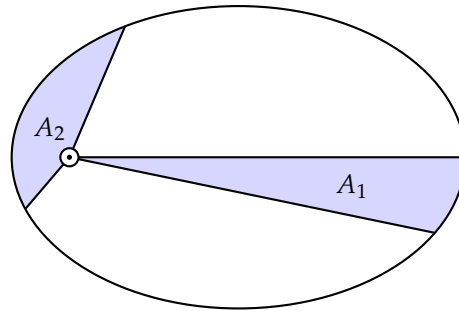
$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (3.1)$$

Utifrån denna definition kan vi finna uttryck för objektets närmaste (**periapsis**) och avlägsnaste (**apoapsis**) punkt till masscentrumet enligt

$$r_A = a(1 + e), \quad r_P = a(1 - e). \quad (3.2)$$

1.2 Keplers andra lag

Keplers andra lag används lite mer sällan men kommer från att rörelsemängdsmomentet (rörelsemängd för rotation) måste vara konstant. Detta gör att ett objekt i en omloppsbana kommer svepa lika stora area under en fast tid oavsett var i banan den börjar.



Figur 3.2: Areorna som sveps kommer vara lika stora om tiden är lika stor, $A_1 = A_2$.

För er som har koll på lineär algebra betyder detta att om du konstruerar en vektor från masscentrumet till planeten, $\mathbf{r}$, och en hastighetsvektor för planeten, $\mathbf{v}$ kommer

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{L} = \text{Konstant}. \quad (3.3)$$

Detta har stora implikationer framöver och kommer användas i härledningen av omloppshastigheter.

1.3 Keplers tredje lag

Antagligen den mest användbara av de 3 lagarna och en som är bra att kunna utantill. Den kommer från centralrörelse i mekaniken och ser ut såhär

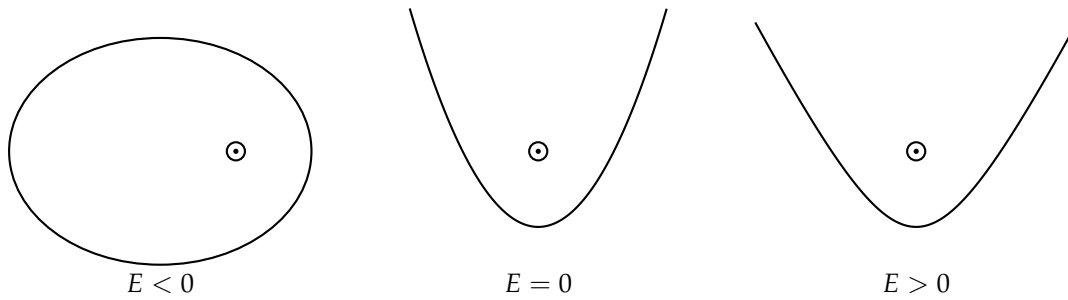
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} (a_1 + a_2)^3 \quad (3.4)$$

där T är omloppstiden, a_1 och a_2 är de respektive halva storaxlarna och m_1, m_2 massorna.

2 Banenergi

Ett sätt att prata om omloppsbanor är med begreppet **banenergi**. Vi definierar energin i en omloppsbana som summan av den kinetiska och potentiella energin för objektet i varje punkt, detta måste vara konstant i hela omloppsbanan. Kinetisk energi är enkelt, men potentiell energi kanske ni inte har sett tidigare. Genom definitionen för arbete finner vi

$$\Delta E_p = \int_{r_1}^{r_2} F_g ds$$



Figur 3.3: De tre energifallen för omloppsbanor: elliptiska, paraboliska och hyperboliska.

som energiskillnaden mellan r_1 och r_2 . Vi definierar nollpunkten för potentiell energi till oändligt långt borta (där $F_g = 0$) vilket ger oss

$$E_p = \int_{\infty}^r G \frac{Mm}{s^2} ds = -G \frac{Mm}{r}. \quad (3.5)$$

Notera att potentiell energi är negativ enligt vår definition. Den totala energin blir då

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} - G \frac{Mm}{r}. \quad (3.6)$$

Vi kan nu studera tre fall beroende på energin. Om $E < 0$ betyder det att den potentiella "energisulden" är större än den kinetiska energin. Detta motsvarar att objektet är bunden i en elliptisk omlopps bana.

Om $E > 0$ betyder det att den kinetiska energin kan övervinna potentialen. Om man låter objektet försvinna ut mot oändligheten kommer den ha kinetisk energi kvar och därför fortsätta åka utåt. Detta motsvarar en bana i form av en hyperbel.

Om $E = 0$ har objektet exakt energin som krävs för att fly potentialen. Alltså kan man säga att den kommer sakta ner desto längre ut den åker men aldrig helt stanna. Detta motsvarar en parabel. Från energin kan vi se att hastigheten för $E = 0$ måste vara exakt

$$v_{flykt} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \quad (3.7)$$

Denna hastighet kallas för **flykthastigheten** och är exakt den hastighet som krävs för att fly ett objekt och inte falla in igen. I en parabel kommer objektet att ha flykthastigheten i varje punkt. Man kan förlänga definitionen för excentricitet e till parabler och hyperbler också. För ellipser är $0 \leq e < 1$, för parabler är $e = 1$ och för hyperbler är $e > 1$.

2.1 Schwarzschildradien

Svarta hål är vanligtvis otroligt jobbiga på alla vis, speciellt att faktiskt räkna på men som ett sammanträffande kan man använda sig av klassisk mekanik för att räkna ut deras radie. Schwarzschildradien är radien av händelsehorisonten och kännetecknas av att ljus aldrig kan lämna om det kommer närmre singulariteten. Alltså kan vi se det som att fly skulle kräva en hastighet större än ljushastigheten. Detta vet vi ju hur man räknar på, vi kan sätta v_{flykt} till c :

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \Rightarrow R = \frac{2GM}{c^2} \quad (3.8)$$

3 Omloppshastighet

Vi kommer kolla på banhastigheten i en bunden elliptisk bana. Vi definierar apoapsis, r_a , till punkten längst från masscentrum och periapsis, r_p , till punkten närmast. Eftersom hastigheten är vinkelrät mot riktningen till centrum här säger Keplers andra lag att

$$r_a \cdot v_a = r_p \cdot v_p$$

där v_a, v_p är hastigheterna i r_a, r_p . Med energibevarande

$$\frac{mv_a^2}{2} - G \frac{Mm}{r_a} = \frac{mv_p^2}{2} - G \frac{Mm}{r_p}$$

och att $r_a + r_p = 2a$ går det att härleda den totala energin för en elliptisk omloppsbana till

$$E = -G \frac{Mm}{2a}. \quad (3.9)$$

Utifrån detta sätter vi

$$-G \frac{Mm}{2a} = \frac{mv^2}{2} - G \frac{Mm}{r} \iff v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (3.10)$$

Denna ekvationen kallas **vis-viva ekvationen** och är otroligt viktig i alla beräkningar av omloppshastigheter. I specialfallet då $a = r$ i alla punkter (alltså en cirkulär omloppsbana) kan formeln reduceras till

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r} \right) = \frac{GM}{r}, \quad (3.11)$$

vilket är samma resultat som vi får om vi räknar utifrån Keplers tredje lag eller centripetalaccelerationen. I en ellips kan vi även finna hastigheten i apoapsis och periapsis utifrån excentriciteten till

$$v_A = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}, \quad v_P = \sqrt{\frac{GM}{a}} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \quad (3.12)$$

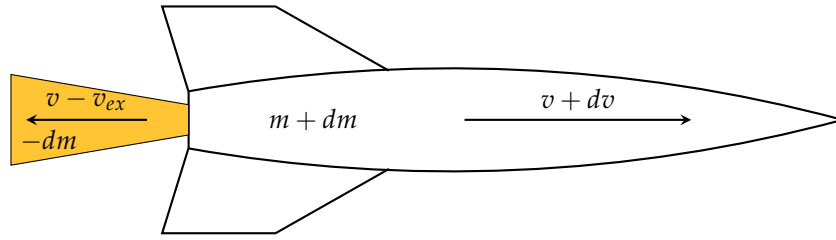
4 Raketfysik

Rymdteknik är inte huvudområdet i astronomiolympiaden, men vissa delar kan komma. Först: tänk en raket som flyger fritt i rymden med massa m och hastighet v . Den skickar ut bränsle med massan $-dm$ och med hastigheten v_{ex} relativt raketen (kolla i figur 3.4). Vi kan från detta ställa upp ett uttryck för rörelsemängden innan och efter bränslet sköts ut:

$$\begin{aligned} mv &= (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - v_{ex}) \iff \\ mv &= mv + mdv + dm v + dmdv - dm v + dm v_{ex} \iff \\ 0 &= mdv + dmdv + dm v_{ex}. \end{aligned}$$

Eftersom $dmdv$ är en så miniskyl term försummar vi denna och fortsätter med

$$\begin{aligned} dv &= -v_{ex} \frac{dm}{m} \iff \\ \int dv &= -v_{ex} \int \frac{dm}{m} \end{aligned}$$



Figur 3.4: En ideal och väldigt vacker raket med massa m och hastighet v .

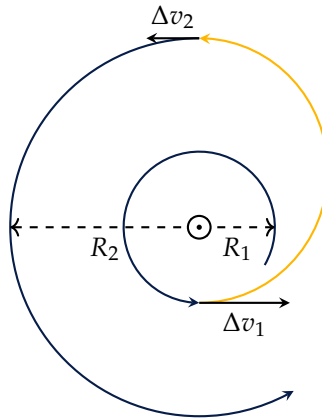
Med några integralregler och logaritmlagar får vi vårt slutresultat: **Tsiolkovskys raketekvation:**

$$\Delta v = v_{ex} \ln \frac{m_0}{m} \quad (3.13)$$

där m_0 är den ursprungliga massan av raket, m är den slutgiltiga massan och Δv är hur mycket raket kan öka sin hastighet med sitt bränsle. Δv används ofta som ett mått av energin en raket har för diverse manövrar, lite som en budget.

4.1 Hohmannövergångar

Ett vanligt exempel där man kan använda Δv är när man ska flytta sig från en cirkulär omloppsbana till en annan. Den minsta möjliga Δv som krävs för denna manöver och det enklaste sättet att utföra den är en Hohmannövergång (figur 3.5). Raketerna gör två ändringar i hastighet för att skapa rätt omloppsbana, alltså kan vi beräkna skillnaden i omloppshastighet på dessa två punkter för att veta den totala Δv som krävs.



Figur 3.5: En Hohmannövergång mellan två cirkulära omloppsbanor

Hastigheterna i de cirkulära banorna beräknas enkelt med ekvation 3.11 och för hastigheterna i den elliptiska transfer-banan använder vi ekvation 3.10 (vis-viva ekvationen). I det här fallet blir a för transferbanan genomsnittet av de andra två banradierna. Om man sätter ihop allt detta till en ekvation blir resultatet

$$\Delta v_{tot.} = \Delta v_1 + \Delta v_2 \quad (3.14)$$

$$\Delta v_{tot.} = \sqrt{GM \left(\frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_1 + R_2} \right)} - \sqrt{\frac{GM}{R_1}} + \sqrt{\frac{GM}{R_2}} - \sqrt{GM \left(\frac{2}{R_2} - \frac{2}{R_1 + R_2} \right)} \quad (3.15)$$

Viktiga formler

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} (a_1 + a_2)^3$$

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

$$v_{flykt} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$E = \frac{mv^2}{2} - G \frac{Mm}{r}$$

$$\Delta v = v_{ex} \ln \frac{m_0}{m}$$

5 Uppgifter

- 3.1** En människa med massan 70 kg utsätts plötsligt för ett enormt tryck och blir till ett svart hål, hur stort blir hålet som skapas?
- 3.2** Ett år på exoplaneten WASP-33b varar 1,22 dagar. Planeten har 2,81 jupitermassor och dess stjärna, WASP-33, har 1,50 solmassor. Hur långt är avståndet mellan stjärnan och dess planet om vi antar att omloppsbanan är cirkulär?
- 3.3** Vi vill mäta månens massa med en exceptionellt stor kanon på månens nordpol. Vi testskjuter skott med högre och högre hastighet tills de inte längre kommer tillbaka till ytan. Hastigheten vi kommer fram till är 2,38 km/s.
- a) Vad är månens massa om dess radie är 1736 km?
- b) Spelar det roll vilket håll vi skjuter?
- 3.4** Melvin och Alvin är på en promenad på Mars måne Phobos. Melvin påstår att han kan kasta en boll så hårt att den kommer slå honom i bakhuvudet. Hur hårt måste han kasta för att lyckas? Phobos har radien 11 km och densiteten 1860 kg/m³.
- 3.5** En rymdfarkost i omloppsbanan kring Jupiter färdas under 15 sekunder 288 km när den är i periapsis (närmst planeten) vid 420 000 km.
- a) I apoapsis (längst från planeten) är farkosten 660 000 km från Jupiter, men hur snabbt färdas den?
- b) Hur lång tid tar det för farkosten att åka ett varv?
- c) Vad är banans excentricitet?
- 3.6** NASA vill skjuta upp ett 11 ton tungt teleskop till omloppsbanan. För detta krävs idealt ungefär 7,5 km/s av Δv . Raketen de använder väger utan bränsle ca 100 ton och kan skjuta ut bränsle i 2,2 km/s.
- a) Hur mycket bränsle behöver raketen?
- b) I verkligheten är 9,4 km/s ett rimligare tal för Δv kostnaden att ta sig till omloppsbanan. Hur mycket bränsle behövs då?
- 3.7** Hur mycket Δv krävs för att åka från en låg omloppsbanan kring jorden (400 km över ytan) till en geostationär omloppsbanan? (I en geostationär bana är omloppstiden 24 h)
- 3.8** Stjärnan S2 har observerats ha en udda omloppsbanan kring ett osynligt objekt vid vintergatans mitt. Periodtiden för omloppsbanan är 16,1 år och den halva storaxeln är 970 AU. Vad är objektet stjärnan kretsar kring, vad är dess massa och vad är dess storlek?
- 3.9** Vad är den minsta mängd Δv som krävs för att ta sig från omloppsbanan 400 km

över jordytan till att ha landat på en av Mars poler? Anta att banorna är cirkulära och att Mars saknar atmosfär.

- 3.10** Astronomer har kommit fram till att stjärnan FA-2023 har 0,77 solmassor, en radie som är 0,75 solradier samt en planet i omloppsbana. Denna planeten, FA-2023 b, korsar lyckligtvis rakt emellan oss och sin stjärna så att ljuset fördunklas varje 34,6 dagar.

a) Hur långt är avståndet mellan planeten och stjärnan? Anta att omloppsbanan är cirkulär.

Mer exakta mätningar av FA-2023 b har gjorts med två metoder. Först har man kollat på hur mycket av ljuset som försvunnit då planeten passerar framför och kommit fram till att det är 1,45 %. Sedan har man kollat på ljusspektra från stjärnan och sett att ljuset rödsiftats med samma periodtid. Detta skiftet motsvarar som mest en hastighet av 1,47 km/s i vår riktning.

b) Bestäm storleken av FA-2023 b.

c) Bestäm planetens densitet.

d) Bestäm ytgravitationen.

Tidigare har vi antagit att omloppsbanan är cirkulär. Anta nu istället att den är elliptisk men att planeten är närmst stjärnan när den korsar mellan den och oss. Tiden som fördunklingarna varar är 3,4 timmar.

e) Vad är banans excentricitet?

- 3.11** Most single-appearance comets enter the inner Solar System directly from the Oort Cloud. Estimate how long it takes a comet to make this journey. Assume that in the Oort Cloud, 35 000 AU from the Sun, the comet was at aphelion.

- 3.12** Estimate the number of stars in a globular cluster of diameter 40 pc, if the escape velocity at the edge of the cluster is 6 km/s and most of the stars are similar to the Sun.

- 3.13** On 9 March 2011 the Voyager probe was 116.406 AU from the Sun and moving at 17,062 km/s. Determine the type of orbit the probe is on.

- 3.14** Antag att jorden skulle kollapsa till ett

svart hål. Vad skulle dess Schwarzschild radie bli?

- 3.15** Ett förmörkande binärt stjärnsystem har en period på 80 dagar. Båda stjärnorna har samma massa och rör sig i cirkulära banor kring varandra. Den halva storaxeln har observerats till att vara 0,2". I spektrumet för systemet kan vi observera de två komponenterna till H_α linjen ($\lambda_0 = 6562,8\text{\AA}$) dela på sig med en maximal delning av 2 Å. Vad är stjärnornas massor och vad är avståndet till dem från solen?

- 3.16** (Final 2023) LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) uppmätte 2015 en gravitationsvåg från två oladdade och roterande svarta hål som slog samman. Genom extremt noggranna mätningar vid skilda platser på jorden lyckades de mäta upp att de svarta hålen roterade 250 gånger per sekund kring varandra vid ögonblicket då deras händelsehorisonter möttes. Vad är massan hos det resulterande, större, svarta hålet som bildades i kollisionen? Försumma ev. energiförlust från gravitationsvågorna.

- 3.17** (Final 2023) En rymdturist vid namn Beff Jezos vill besöka (och snurra minst ett varv i) dem två mest kända ekvatoriella omloppsbanorna, och undrar hur mycket bränsle hans rymdskepp behöver ha som minst. Mer specifikt vill Beff besöka LEO (400 km över havet, som ISS) och GEO (35786 km över havet), vilka båda är cirkulära banor. Om själva raketen Mr Jezos ska åka i väger 2 ton (inklusive Beff) utan bränsle, och hans raket skjuter ut gas i en hastighet på 10 km s^{-1} , hur mycket bränsle behöver hans raket ha vid uppskjutning? Ignorera atmosfären och anta att Beff skjuts upp från havsnivå på ekvatorn i jordens rotationsriktning, i valfri riktning. Hans raket är en s.k. Single-Stage-to-Orbit, och släpper alltså inte loss några raketsteg under färd.

- 3.18 Philip i perigee** (Final 2024) Ett telekomföretag vill skicka upp Philip i en satellit, med totalmassa 29 ton där Philips massa ingår, till GEO (Geostationary Orbit) från

LEO (Low Earth Orbit) för att utföra viktiga experiment. En satellit i GEO har en konstant position över en punkt över jordens ekvator och har därför samma period som jordens rotation runt sin egna

axel. LEO ligger ungefär 2000 km över jordens yta. Både LEO och GEO är cirkulära banor. Bestäm den totala rörelsemängdsförändringen för att utföra en Hohmann-övergång mellan banorna.

Kapitel 4

Astrofysik

Astrofysiken är studien av hur stjärnor fungerar. Både som enskilda system och som del av större system. Detta innebär att detta kapitel kommer vara en studie av gravitationella N-kroppssystem.

1 Virialsatsen

I allmänhet har N-kroppssystem inga analytiska lösningar och kan vara högst kaotiska. Alltså måste vi göra antaganden om systemens struktur för att kunna säga något av värde om dem. I denna del kommer vi göra ett av de svagaste antaganden och det är att

$$\ddot{I} \approx 0, \quad (4.1)$$

där I är systemets **tröghetsmoment**. Detta är rotationsmekanikens motsvarighet till mass och definieras i ett system med massorna m_i som

$$I = \sum_i m_i r_i^2, \quad (4.2)$$

där r_i är avståndet mellan massan och systemets masscentrum. Antagandet vi har gjort må verka något matematiskt, men det betyder i praktiken system som ändrar storlek långsammare än det typiskt tar en partikel att åka genom systemet". Detta antagande gäller för:

- ★ planeter i cirkulära omloppsbanor,
- ★ stjärnor i alla dess stadier,
- ★ galaxer,
- ★ stjärnhopar &
- ★ nebulosor.

Men det gäller **inte** för:

- ★ planeter i elliptiska omloppsbanor,
- ★ supernovor,
- ★ kolliderande galaxer & stjärnhopar.

Alltså kan man se att detta stämmer för de flesta system vi vill studera i astrofysiken. Dessa system kallas för **virialiserade**. Från ekvation (4.1) går det att härleda att

$$E_p + 2E_k = 0, \quad (4.3)$$

vilket är den omtalade **virialsatsen**. Notera att detta är energiförhållandet i cirkulära omloppsbanor, alltså strävar systemen efter att ha "i genomsnitt" cirkulära banor inom sig.

En annan intressant storhet vi kan studera i gravitationella system är värmekapaciteten C . Vi tänker oss att den totala kinetiska energin E_k i vårt system beror på temperaturen T som i en ideal gas,

$$E_k = \frac{3N}{2} k_B T, \quad (4.4)$$

där N är antalet partiklar i systemet. Då kan vi definiera värmekapaciteten som

$$C = \frac{\partial E_{tot}}{\partial T} = -\frac{\partial E_k}{\partial T} = -\frac{3N}{2} k_B < 0. \quad (4.5)$$

Här har vi använt virialsatsen för att visa att $E_{tot} = -E_k$. Alltså är värmekapaciteten för ett självgraviterande system negativ. Tolkningen är att om systemet förlorar energi (t.ex. genom strålning) kommer systemet kontrahera och öka i temperatur. I de flesta fall är energiförlusten i någon mån proportionell mot systemets temperatur. Ifall detta är fallet kommer temperaturen att öka exponentiellt över tid medan molnet blir mindre och mindre. Detta kallas för en **graviterisk kollaps**. På detta sätt är alla självgraviterande system instabila. Detta är hur nebulosor kollapsar för att skapa stjärnor.

2 Hydrostatisk jämvikt

I denna sektion kommer vi behandla många matematiska formler som ni inte förväntas kunna. Det ni förväntas kunna dock är förståelsen bakom dem.

Då nebulosor kollapsar för att skapa stjärnor, kommer en jämvikt att uppnås i vilken stjärnan är stabil. Detta är en jämvikt mellan det interna trycket av stjärnan och gravitationen. Vi börjar med att anta sfärisk symmetri för vår stjärna (ett relativt bra antagande). För att studera detta kommer vi att dela in stjärnan i lager av tjocklek dr , med massan dm . Vi finner då att

$$F = F_p + F_g = dP \cdot A - G \frac{m(r)dm}{r^2} = 0, \quad (4.6)$$

där A är arean av skalet, r är radien och $m(r)$ är massan innesluten innanför r . Vi kan förenkla detta vidare genom att konstatera att

$$A = 4\pi r^2,$$

och att

$$dm = \rho(r) \cdot V = \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr,$$

där $\rho(r)$ är densiteten i skalet. Detta ger

$$dP \cdot A = G \frac{m(r)dm}{r^2}, \quad (4.7)$$

$$\iff dP \cdot 4\pi r^2 = G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2} 4\pi r^2 dr \quad (4.8)$$

$$\iff \frac{dP}{dr} = G \frac{m(r)\rho(r)}{r^2}. \quad (4.9)$$

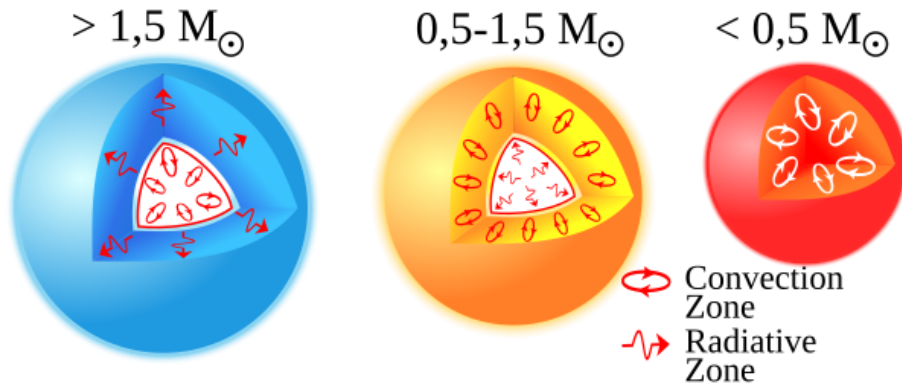
Detta är det första kriteriet för hydrostatik. Ett andra kriterium är lätt att hitta genom att kolla på $m(r)$:

$$\frac{dm}{dr} = \rho(r)4\pi r^2. \quad (4.10)$$

Tillsammans nu har vi två differentialekvationer som kopplar 3 variabler: $P, m(r)$ och $\rho(r)$. För att få kompletta lösningar behöver vi därför en till ekvation. Om vi antar att stjärnan består av en ideal gas (vilket vi gör) får vi använda ideal gaslagen:

$$P = \rho \frac{k_B}{\mu m_H} T, \quad (4.11)$$

där m_H är massan av en väteatom och μ är snittmassan av en atom i stjärnan jämfört med väte (typiskt ca 1,2 pga helium). Denna ekvation skjuter dock bara problemet framåt eftersom vi nu funnit en ny variabel, T . Nu blir det komplicerat eftersom värme kan transporteras på två olika sätt genom stjärnatmosfärer: **radiativt** och **konvektivt**.



Figur 4.1: Dominerande värmetransportmekanism beroende på storlek av stjärna och djup. [11]

Radiativ värmetransport bygger på att värme transporteras med fotoner genom genomskinlig materia. Därför beror denna transportmetod mycket på opaciteten κ och på den genomflödande effekten L . Radiativ värmetransport kan beskrivas med

$$\frac{dT}{dr} = \frac{3\kappa\rho(r)L(r)}{64\pi r^2\sigma T^3}, \quad (4.12)$$

där σ är Stefan-Boltzmanns konstant.

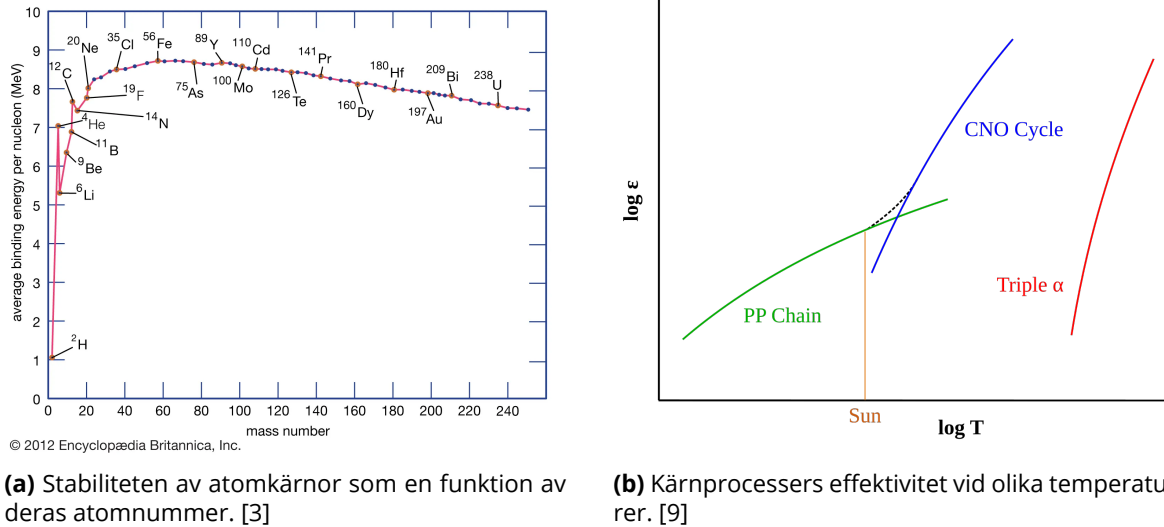
Konvektiv transport är *ännu jobbigare* eftersom det inte finns en komplett matematisk beskrivning av fenomenet, men det bygger på att varmare material flyter uppåt tills det når kallare områden där det kyls av och sjunker igen. Detta är processen som sker när man gör kola eller gröt. Genom att förenkla till helt joniserade atomer som expanderar och kontraherar adiabatiskt får vi

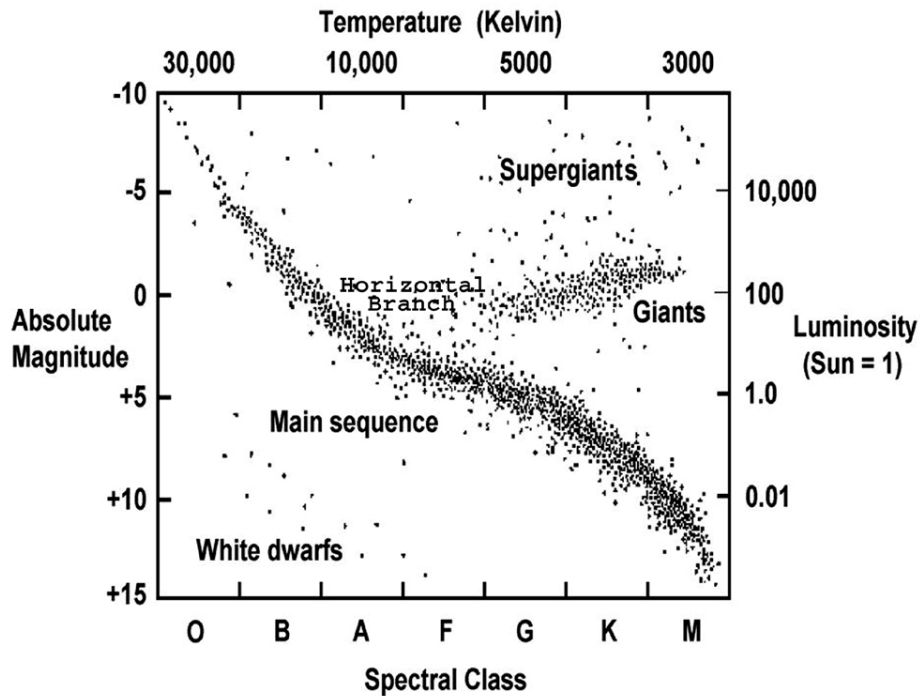
$$\frac{dT}{dr} = \frac{2T}{5P} \frac{dP}{dr}. \quad (4.13)$$

Vilken av dessa två processer som dominerar beror mycket på κ , men i praktiken kommer solliknande stjärnor ha ett konvektivt lager längst ut och ett radiativt lager längre in. För större stjärnor är detta omvänt, vilket kan ses i fig. 4.1. Slutligen måste vi beskriva L . Detta går att göra genom att säga att all energi som skapas inom stjärnan måste flöda genom alla skal längre ut. Detta ger att

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon, \quad (4.14)$$

där ε är effekten av solens materia per kg. Om vi nu kan finna ekvationer för κ och ε som funktioner av ρ, T, P kan vi i princip lösa systemet. Problemet är att det ännu inte finns analytiska beskrivningar av dessa funktioner, utan endast experimentella approximationer. I fig. 4.2a kan vi se hur ε varierar beroende på kärnprocess.





Figur 4.3: Ett typiskt HR-diagram. [1]

för huvudseriestjärnor, där L är luminositet och M är massa. Beroende på vem man frågar kan man få olika värden på exponenten, allt mellan 3 och 4. Både vi och IOAA använder oss av 3,5 som standard. Från detta kan vi härleda en relation, livstiden t . Om vi säger att mängden förbrukningsbart väte i stjärnan är proportionellt till M och att hastigheten med vilken man förbrukar den är proportionellt till L får vi

$$t \propto \frac{M}{L} \propto \frac{M}{M^{3.5}} = M^{-5/2} \propto L^{-5/7}. \quad (4.16)$$

Alltså ser vi att massiva stjärnor lever korta liv på huvudserien och raskt vidare till nästa stadie.

2.3 Eddington Luminositeten

En effekt vi noterbart inte pratade om i den tidigare sektionen är **stråltrycket**, nämligen trycket som tillförs gasen från fotoner som försöker ta sig ut ur stjärnan. Detta eftersom denna effekt är försumbar i de flesta stjärnor. Detta har dock större påverkan i stjärnornas jättestadier där stråltrycket främst driver massförlust.

Vi börjar med att studera vad som händer när en elektron absorberar eller sprider en foton. elektronen kommer då att absorbera fotonens rörelsemängd vilket är

$$p_\gamma = \frac{hf}{c} = \frac{E_\gamma}{c}, \quad (4.17)$$

där E_γ är fotonens energi. Kraften som elektronen känner är då

$$F_L = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{E_\gamma}{c}.$$

Så det vi måste finna är effekten av fotonerna som slår elektronen. För det jämför luminositeten L , stjärnans totala area och tvärsnittsarean av en elektron σ_T . Vad betyder ens tvärsnittsarean för elektron? Vi kommer ignorera den frågan och hänvisa till kvantfysik. Om vi slår samman detta får vi att

$$F_L = \frac{L}{4\pi r^2 c} \sigma_T. \quad (4.18)$$

Vi vill nu studera hur stor vi kan göra stråltrycket innan det sliter sönder stjärnan. För detta jämför vi stråltrycket och gravitationskraften för en elektron och proton. Vi måste använda oss av protonmassan i gravitationsberäkningen eftersom protonerna följer elektroner även om de inte är bundna i atomer. Vi får då

$$\begin{aligned} F_L &= F_g, \\ \Leftrightarrow \frac{L}{4\pi r^2 c} \sigma_T &= G \frac{M m_p}{r^2}, \end{aligned}$$

där M är stjärnans totala massa. Från detta får vi den så kallade **Eddington luminositeten**

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi G m_p c}{\sigma_T} M = 3,2 \cdot 10^4 \frac{M}{M_\odot} L_\odot, \quad (4.19)$$

där $M_\odot$ och $L_\odot$ är solens massa respektive luminositet. Detta är alltså den största luminositeten något vätebaserat objekt får ha. Vid luminositeter större än detta kommer hela stjärnan att bli obunden och slita sig sönder. De flesta stjärnor når aldrig Eddington luminositeten ens i sina jättestadier, men även om en stjärna närmar sig L_{Edd} kommer den att uppleva stor massförlust.

3 Exotiska rester

3.1 Lättare stjärnor

För lättare stjärnor ($M < 1,5M_\odot$) slutar jättestadiet genom att stjärnans yttre lager skickas ut från stråltrycket och skapar en **planetarisk nebulosa** medan kärnan förblir intakt. Eftersom dessa stjärnor har för liten massa har kärnan inte nått hela vägen fram till järn i sin fusion än och kommer därför vara en mix av kol och syre. När lagren förloras försvinner också mycket av trycket utifrån vilket innebär att fusionen också slutar. Utan någon fusion kollapsar kärnan under sin egen gravitation till en **vit dvärg**. Vita dvärgar kan inte beskrivas som en ideal gas av atomer utan uppvisar en massa udda kvanteffekter. Med en så hög densitet som dessa stjärnor har kommer antalet fria energinivåer vid låga energier i stjärnan börja ta slut vilket tvingar upp elektronerna i högre energinivåer. Detta skapar ett tryck som kallas för degenereringstryck och kan för den intresserade beskrivas icke-relativistiskt som

$$P = \frac{8\pi h^2}{15m_e} \left(\frac{3\rho}{8\pi m_p \mu_e} \right)^{5/3}, \quad (4.20)$$

vilket ser ut som en komplicerad ekvation tills man inser att det är en konstant gånger $\rho^{5/3}$. Alltså behöver vi inte bry oss om T som vi gjorde i ekvation (4.11), alltså slipper vi värmetransport! Till skillnad från huvudseriestjärnor kan vi lösa detta systemet analytiskt och då får vi att

$$R_{\text{WD}} \propto M_{\text{WD}}^{-1/3}. \quad (4.21)$$

Alltså minskar vita dvärgar med större massa. Vita dvärgar med mycket hög massa kommer dock med denna modell att ha elektroner som rör sig i över ljushastigheten och kommer därför producera ett tryck som är på tok för högt. Om vi lägger till de relativistiska effekterna kommer vi

få att radien minskar ännu snabbare och blir 0 vid $M = 1,44M_{\odot}$, också känt som Chandrasekhar-massan. Alltså är vita dvärgar inte tillåtna att ha högre massor i vilket fall de kollapsar under egen vikt. Om det skulle hända att en vit dvärg formas med en lägre massa men sedan ansamlar sig mer, till exempel genom binärt system, och därefter korsar M_{Ch} så kommer all kol och syre bli till järn i en enorm explosion som kallas **supernova typ 1a** (thermonuclear supernovae). Eftersom dessa sker vid konstant massa kommer alla SN1a ha den absoluta magnituden $M_{bol.} = -19,3$.

3.2 Tyngre stjärnor

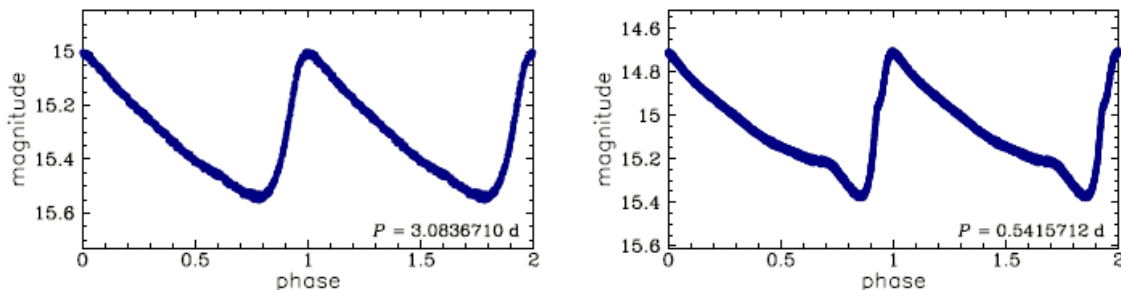
För stjärnor över $1,5M_{\odot}$ kommer de yttre lagren vara för hårt bundna för att strålas bort. Fusionen här kommer därför fortsätta hela vägen tills stjärnan har en kärna helt av järn. När stjärnan till slut får slut på sin energi blir kollapsen mycket mer våldsamt i form av en **supernova typ 1b, 1c eller II** (core-collapse supernovae). Energin för supernovan kommer från potential-killnaden av att kontrahera hela stjärnan till en liten reststjärna.

Resten kommer antingen vara en **neutronstjärna** eller ett **svart hål**. Neutron stjärnor är liknande till vita dvärgar förutom att alla protoner och elektroner tryckts ihop för att skapa neutroner. Degenereringstrycket kommer i detta fallet från neutronerna istället för elektronerna men matten är liknande, om än något mer komplicerad på grund av allmän relativitet. Motsvarigheten till Chandrasekhar massan för neutronstjärnor är **Tolman-Oppenheimer-Volkoff gränsen** som befinner sig någonstans mellan 2,2 och 2,9 $M_{\odot}$. Vid högre massor finns det inget tryck som kan övervinna gravitationen och ditt objekt kollapsar till ett svart hål, där all massa tros vara i en enda punkt.

4 Variabla stjärnor

På vissa delar av HR-diagrammet når aldrig stjärnorna jämvikt mellan stråltryck och gravitation. Istället kommer stjärnans atmosfär bete sig likt en oscillator och expandera och kontrahera med tid i en typ av svängning. Denna svängning drivs av atmosfärens varierande opacitet κ med förändrande tryck och innebär att svängningen kommer att behålla sin styrka medan den i de flesta stjärnor förlorar styrka till friktion. Denna typen av stjärnor kallas för **variabler**.

Det finns flera typer av variabler, alla med en unik underbyggande fysik. Vi kommer inte prata om alla av dem utan ett par som har visat sig centrala för astronomin. Dessa är **Cepheid**-variablerna och **RR-Lyrae** stjärnorna. Dessa två typer har oscillationskurvor som går att känna igen väldigt enkelt och kan därför karaktäriseras på långa avstånd. Dessa kurvor går att se i figur 4.4. Anled-



Figur 4.4: Flux-graf av en Cepheid-variabel (V) och en RR-Lyrae stjärna (H). [8]

ningen till att vi lägger tryck bakom dessa två variabla stjärnor är att man i början av 1900-talet

fann sätt att bestämma deras luminositeter utifrån deras perioder. För RR-Lyrae stjärnor gäller att alla stjärnor har ungefär samma luminositet (skiljer sig mellan modeller, men accepterat är $M = 0,6 \pm 0,2$) medan för Cepheider kan vi visa att följande empiriska formel gäller

$$M = -2,78(\lg(P) - 1) - 4,00, \quad (4.22)$$

där M är den absoluta magnituden och P är periodtiden av oscillationerna i dygn. Eftersom periodtiden av en variabel stjärna är mycket enkel att observera kan vi med detta förhållande beräkna absoluta magnituder av stjärnor mycket längre bort än vad man kunde göra parallax mätningar. Detta förhållande (kallat **Leavitt's lag**) användes för att första gången mäta avstånd till andra galaxer.

5 Binära system

Stjärnor föds oftast i grupp, när det finns mycket gas att tillgå klumpas den i flera klumpar. Ofta föds stjärnor så nära att de blir gravitationellt bundna i samma system. Binära stjärnsystem kan upptäckas på många olika sätt och klassificeras därefter. Följande är de vanligaste:

1. **Visuella:** De två stjärnorna går att skiljas åt med en vinkel däremellan.
2. **Spektroskopiska:** De två stjärnorna rör sig i olika riktning i sina banor och delar därför upp spektrallinjer i 2 från doppler-effekten. Separationen av linjerna motsvarar deras hastigheter relativt varandra.
3. **Förmörkande:** Stjärnorna täcker varandra sett från jorden vilket skapar dippar i deras flux. Dippen i flux motsvarar fluxet av den täckta stjärnan.
4. **Astrometriska:** Endast ena stjärnan syns men kommer på grund av den andra stjärnan variera så mycket i position i sin omlopps bana att den ser ut att wobble fram. Vinkeln den rör sig är radien av dens omlopps bana kring sin kompanjon.

Stjärnor förekommer såklart även i system av 3 och flera, men dessa är i grunden instabila då 3-kroppssystem är i grunden kaotiska. Magnituden av två sammanlagda stjärnor fås genom att addera deras flux

$$m_{tot} = -2,5 \lg \frac{F_1 + F_2}{F_0} = -2,5 \lg \frac{F_0 10^{\frac{m_1}{-2,5}} + F_0 10^{\frac{m_2}{-2,5}}}{F_0} = -2,5 \lg (10^{\frac{m_1}{-2,5}} + 10^{\frac{m_2}{-2,5}}), \quad (4.23)$$

där m_1, m_2 är de två stjärnornas individuella magnituder och F_0 är Vegas flux. Flerkroppssystem uppstår inte bara med stjärnor. **Exoplaneter** (planeter utanför solsystemet) är i grund och botten i binära system med sina värdstjärnor. Exoplaneter upptäcks på så vis på liknande sätt som binära stjärnor men med större möda. En skillnad jämfört stjärnor att exoplaneters luminositet oftast är försumbar. Detta innebär att man oftast inte märker när en exoplanet går bakom sin värdstjärna (**secondary transit**) utan endast när planeten täcker stjärnan (**primary transit**). Då detta händer minskar fluxet med ΔF enligt

$$\frac{\Delta F}{F} = \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^2, \quad (4.24)$$

där R_p och R_* är de respektive radierna för planeten och stjärnan.

6 Stjärnhopar

Ofta när en stjärna föds i en nebulosa skapas inte bara binära system som binds samman utan även flera separata stjärnsystem. Dessa system är inte i omloppsbana kring varandra men är oftast svagt gravitationellt bundna och rör sig därför genom sin galax i en klump. Dessa klumpar kallas **stjärnhopar** och går att observera över hela Vintergatan. Det finns två typer av stjärnhopar, öppna och klotformiga.

Öppna stjärnhopar är (relativt) unga samlingar av stjärnor som lämnat/konsumerat sin nebulosa men fortfarande rör sig i klump på himlen. Dessa hopar kännetecknas av att de har låg densitet och en stor spridning av huvudseriestjärnor. Över tid sprids dessa hopar ut i galaxen då deras låga massa inte kan hålla ihop gruppen i längden. Solen har en gång varit del av en sådan här hop. Dessa hopar rör sig huvudsakligen bland andra stjärnor i galaxskivan.

Klotformiga stjärnhopar är betydligt äldre hopar som på grund av högre massa lyckats hållas intakta över längre tid. Dessa kännetecknas av att de har större massa och högre densitet än de öppna stjärnhoparna samt att de kvarlevande stjärnorna är kallare. Dessa stjärnhopar begränsas inte av galaxskivan utan finns även ovanför och under galaxskivan.

Eftersom stjärnor med olika massa har olika livslängder kommer sammansättningen av stjärnhopar utvecklas över tid. Tyngre stjärnor till vänster i huvudserien på HR-diagrammet kommer snabbare ta slut på sitt väte och lämna huvudserien. För de flesta stjärnhopar finns det alltså då en punkt på huvudserien vid vilken det inte finns starkare stjärnor eftersom de lämnat för sina respektive jättefaser. Denna punkt ("**Main sequence turn-off point**") gör det möjligt för oss att datera stjärnhopen. På detta sätt har man funnit både unga stjärnhopar och stjärnhopar lika gamla som Vintergatan.

Stjärnorna i en klotformig stjärnhop kan ses som partiklar i en självgraviterande gas kan man applicera virialsatsen (??). Energiförlusten består här inte av elektromagnetisk strålning utan av att stjärnor blir slungade ut ur hopen efter nära träffar med andra stjärnor. Detta är en långsam, men mätbar process som långsamt gör att klotformiga stjärnhopar ökar i densitet och slutligen når en graviterisk kollaps. Slutresultatet av detta är att stjärnor smälter samman i hopens kärna. Detta är hur supermassiva svarta hål skapas.

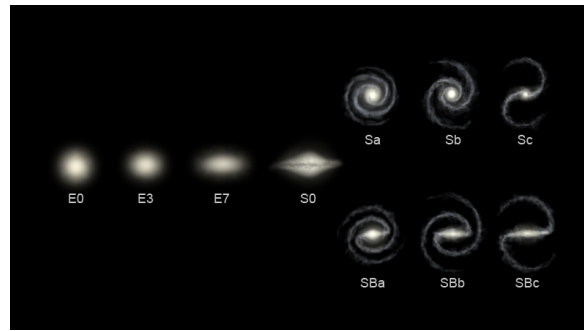
7 Galaktisk astrofysik

En galax är en enorm samling av materia. En sådan innehåller stjärnor, gas, stoft och förmodad mörk materia, sammanbunden genom gravitation. De större galaxerna har cirka 10^{11} solmassor stjärnor, mellan en och tio miljarder solmassor interstellär gas och 10^{12} solmassor mörk materia. Många galaxer, kanske de flesta, inkluderar även supermassiva kompakta objekt, sannolikt svarta hål i centrum.

Den galax vi befinner oss i är Vintergatan som är en stavspiralgalax.

Edwin Hubble gjorde på 1930-talet ett system för klassificering av galaxer med elliptiska galaxer, linsformade galaxer, irreguljära galaxer, normala spiralgalaxer och stavspiralgalaxer. Det existerar också mellanformer och former som faller utanför dessa grupper då (om)bildning av galaxer är en fortgående process.

E är en elliptisk galax, S är en spiralgalax, SB är en stavspiralgalax, och Irr är en irreguljär galax. Siffran efter E talar om hur excentrisk galaxen är. Denna siffra är $10 \cdot (a - b) / a$, där a är storaxeln



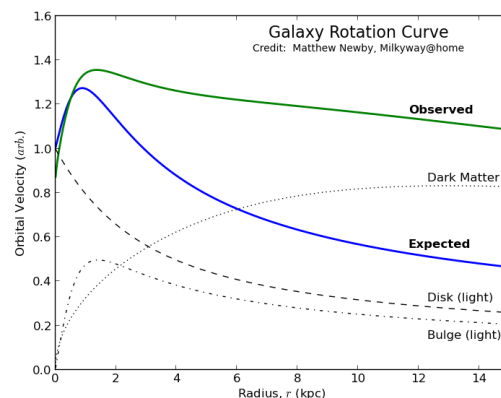
Figur 4.5: Hubbles galaxklassifikation. [2]

och b är lillaxeln så som vi ser den. Bokstaven efter S och SB är a, b eller c som står för hur tät lindade spiralarmarna är och storleken hos centrellepipsiden. En Sa-galax har tätt lindade och svagt definierade armar och har ett relativt stort kärnparti. En Sc-galax å andra sidan har öppna väldefinierade armar och ett litet kärnparti.

7.1 Mörk materia

Massan av galaxer kan mätas på två olika sätt. Man kan uppskatta mängden synlig materia i galaxen genom att studera den totala luminositeten av galaxen i kombination med galaxens spektrum. Här använder vi vår tidigare relation för stjärnornas massor. Man kan också studera omloppshastigheten av stjärnor i galaxen med hjälp av doppler. Om man antar cirkulära omloppsbånar får man då ett förhållande för galaxens densitet vid olika punkter.

Den sistnämnda metoden visar en massa cirka 5 gånger större än den synliga. Den visar dess-



Figur 4.6: Rotationen av en typisk galax på grund av mörk materia. [7]

utom en fördelning som sträcker sig mycket längre ut från kärnan än vad den synliga materien verkar gå. Detta eftersom rotationshastigheten inte verkar avta med avståndet som förväntat utan snarare planar ut vid höga avstånd från galaxens centrum. Denna osynliga materian kallar vi för **mörk materia**.

7.2 Tully-Fisherrelationen

Som vi tidigare såg har de flesta galaxer en tydligt definierad rotationshastighet som beror på dess storlek och massa. Denna kan man enkelt mäta för även avlägsna galaxer med dopplerrörelse. För specifikt spiralgalaxer har man experimentellt hittat en relation mellan denna rotationshastigheten och galaxens totala luminositet. Denna relation är

$$L \propto v^4. \quad (4.25)$$

Eftersom L kan användas i avståndsmodulen är detta en relation som kan användas för att hitta avståndet till galaxer långt borta. Det är dock värt att notera att felmarginalerna på denna relationen är enorma och kommer därför ofta ge orimliga svar.

Viktiga formler

$$E_p + 2E_k = 0$$

$$C < 0$$

$$L \propto M^{3,5}$$

$$L_{\text{Edd}} = 3,2 \cdot 10^4 \frac{M}{M_{\odot}} L_{\odot}$$

$$M = -2,78(\lg(P) - 1) - 4,00$$

$$\frac{\Delta F}{F} = \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^2$$

$$L \propto v^4$$

8 Uppgifter

- 4.1 Vilka typer är följande stjärnor (huvudserie, jättar, superjättar, vita dvärgar)?
 - (a) $\lambda_{\text{Max}} = 7500\text{\AA}$, $L = 0,2L_{\odot}$
 - (b) $\lambda_{\text{Max}} = 1500\text{\AA}$, $L = 0,1L_{\odot}$
 - (c) $\lambda_{\text{Max}} = 2900\text{\AA}$, $L = 2000L_{\odot}$
 - (d) $\lambda_{\text{Max}} = 1200\text{\AA}$, $L = 50L_{\odot}$
- 4.2 Två stjärnor i ett kluster skiljer sig i ljusstyrka med en faktor 10. Den starkare har temperaturen 6000 K medan den svagare har temperaturen 5000 K. Vad är förhållandet mellan deras radier?
- 4.3 När en viss stjärna går från att vara i huvudserien till att vara en röd jätte kommer dess temperatur att minska med en faktor 3 medan radien ökar med en faktor 100. Hur mycket ljusstarkare blir den på himlen?
- 4.4 Polaris (polstjärnan) är den närmaste typ 1 Cepheiden till solen vi hittat. Den har en period på 7,42 dagar och den apparenta magnituden 1.98, hur långt bort är den?
- 4.5 Edwin Hubble observerade i början av 1900-talet Cepheid variabeln M31-V1 i Andromeda som då ansågs vara en nebulosa. Han bestämde dens periodtid till 31.4 dagar och använde Leavitt's lag för att beräkna avståndet till stjärnan. Hur långt bort är andromeda om den apparenta magnitud han observerade var 18.5? Detta var första gången mänskligheten hade bevis för att galaxer fanns utanför vintergatan.
- 4.6 Den hittills enda supernovan som har observerats i andromedagalaxen var Sn

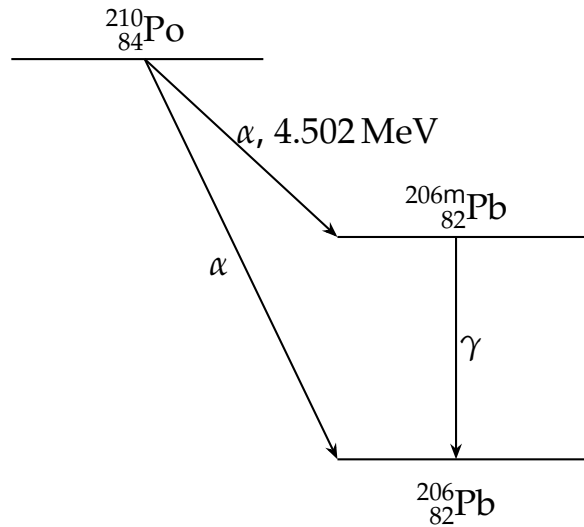
1885A och hade den apparenta magnituden +6 (på gränsen till synlig med blotta ögat). Använd detta tillsammans med svaret i förra frågan för att avgöra om den var av typ 1a eller ej.

- 4.7** En supernova (SN 2011fe) av typ 1a syntes i M101 (Pinwheel galaxy) med den apparenta magnituden +9.9. Hur långt bort är M101?

- 4.8** Vad är den maximala luminositeten av en huvudseriestjärna? Alltså, vilken är huvudseriens övre gräns?

- 4.9** Stjärnor på avståndet 20 000 ljusår från en galax centrum rör sig ett var på 300 miljoner år. Beräkna massan av den materia som finns i galaxen inom detta avstånd från galaxens centrum.

- 4.10** (Final 2023) Polonium-210 kan alfasönderfalla till bly-206, antingen direkt eller genom en exciterad bly-atomkärna (se sönderfallsschema nedan). Beräkna gammafotonens energi. Relevanta nuklidmassor är $m(^{210}_{84}\text{Po}) = 209.982\,873\,6\,\text{u}$, $m(^{206}_{82}\text{Pb}) = 205.974\,465\,3\,\text{u}$, och $m(^4_2\text{He}) = 4.002\,603\,25\,\text{u}$.



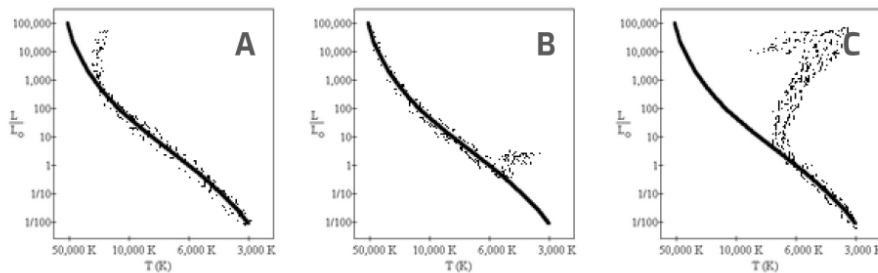
4.11 Stjärnornas ålderdomshem (Final 2024)

Nedan finns HR-diagram för 3 stjärnhopar.

- Ordna hoparna enligt ålder och förklara varför.
- Uppskatta åldern av stjärnhop A. Till er hjälp har ni att astrofysiker funnit dessa empiriska förhållanden för huvudserie-stjärnor:

$$L \sim M^{3.5}, \quad t \sim M^{-2.5}$$

där L är stjärnans luminositet, M dess massa och t dess livstid på huvudserien. Solen kommer leva ca 10 miljarder år på huvudserien.



Figur 4.7: Tre stjärnhopar i olika åldrar, L_0 står för solens luminositet.

- 4.12 En kärnfull fråga** (Final 2024) En högt aktuell forskningsfråga är hur densiteten av neutronstjärnor varierar med radien. Detta uttrycks generellt genom en *equation of state* (EOS). Att studera EOS kan öka vår förståelse för både neutronstjärnor och grundläggande kärnfysik.

I denna fråga skall vi undersöka en EOS som använder styckvisa polytroper¹ och använda data från Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) för att inferera massan av bly. På detta sätt är det också möjligt att begränsa modellparametrar för EOS genom att jämföra med mätningar av kärnmassor.

Vi kommer att börja med att undersöka frekvensen av utsända gravitationsvågor, och utifrån ett givet värde på frekvensen ta reda på vilken av våra modeller som kan anses ligga i linje med denna frekvens. Därefter skall vi vidare dra slutsatser kring modellens giltighet genom en koppling mellan våra modeller och massan av atomkärnor som vi kan mäta.

Låt oss anta att vi observerar en sammansmältning av två neutronstjärnor. Låt systemet vara symmetriskt och approximativt cirkulärt, d.v.s. båda neutronstjärnorna har lika stor massa om $1,4M_{\odot}$. Dessa system emitterar gravitationsvågor till följd av kropparnas rörelse, som har en frekvens som är dubbelt så stor som orbitalfrekvensen.

- (a) Antag att neutronstjärnorna har ett avstånd mellan sig lika med a . Beräkna frekvensen av de utsända gravitationsvågorna, f_{GW} .
- (b) För EOS med styckvisa polytroper kan radien för en $1,4M_{\odot}$ neutronstjärna uttryckas approximativt som

$$R_{1,4} \simeq 9,68 + 0,168p_1 - 0,00120p_1^2 \text{ km},$$

där $0 \leq p_1 \leq 20,933 \text{ MeV}$ är ett tryck och genomgående anges i MeV. I detta empiriska samband ignorerar vi dimensionsfel.

Utgå från Tabell 4.1 nedan. Antag att vi har observerat att symmetriska binära neutronstjärnsystem med massorna ovan i genomsnitt har en frekvens om $(4500 \pm 300) \text{ Hz}$ (vid provdagen stod det $(1100 \pm 150) \text{ Hz}$) vid sammansmältningsögonblicket. Bestäm vilken av modellerna som kan anses ligga i linje med dessa observationer. Antag att de kan anses ligga i linje med observationerna om de ligger inom den angivna felmarginalen.

Modell	$p_1 \text{ [MeV]}$	γ
1	14,304	2,533
2	20,933	2,770
3	9,676	2,290

Tabell 4.1: Modellparametrar för tre olika polytropiska EOS. Parametern γ är en dimensionslös parameter.

- (c) Massan av bly-208 ($^{208}_{82}\text{Pb}$) är enligt experiment i labb mätt till $207,976652 \text{ Da}$. Utifrån en enklare teoretisk modell kan vi uttrycka bindningsenergin av bly-208 som²

$$E_B(^{208}_{82}\text{Pb}) = 1549,3 + 21,815 \cdot 1,85^{-\gamma} p_1 \text{ MeV}.$$

Bestäm utifrån detta vilken av de ovan givna modellerna som överensstämmer bäst med mätningar.

¹En polytrop är ett särskilt beroende mellan tryck och densitet, som inte är vidare relevant här.

²Har du tid över kommer här en liten sidenote. Idén i denna fråga är att formuleringen av en EOS samspelar med energin i nukleär materia. Bland annat betraktar vi implicit en s.k. symmetrienergi, som är energin som uppkommer då materia avviker från lika andel protoner och neutroner. Detta är en viktig del i modelleringen av neutronstjärnor, men är också något som tas i beaktning vid teoretiska beräkningar av atomkärnors massor. Här betraktar vi en sammanslagning av dessa betraktelser och den s.k. *liquid drop modellen* för kärnmassor för att se hur observationer kan kopplas till massan av atomkärnor.

- (d) Antag att vi undersöker en modell där vi har en symmetrisk sammanslagning av lika massiva svarta hål istället för neutronstjärnor. Om den gravitationsvågsfrekvensen vid sammansmältningen är densamma som i delfråga *b*), vad är då massan av en av de svarta hålen?

Kapitel 5

Kosmologi

Kosmologi är ett fält inom astrofysik som undersöker universums utveckling, storskaliga struktur och framtida utsikter. För att kunna studera detta på en sådan skala gör man ett fundamentalt antagande som brukar kallas den **Kosmologiska principen**. Antagandet lyder att universum ser likadant ut, oavsett vart man befinner sig, i stor skala. Självklart finns olika mikrotillstånd, men makrotillståndet anses konstant. Detta har olika följder, till exempel antas universum ha konstant medeldensitet. Man antar dessutom att universum beter sig enligt en inflationsmodell.

1 Hubbles lag

En av de första upptäckterna som gjordes och som även är ytterst relevant är Hubbles observationer och hans lag. Hubble observerade att hastigheten som galaxer rörde sig med bort från oss, var beroende av dess avstånd till oss på jorden.

$$v = H_0 \cdot r, \quad (5.1)$$

där $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$. Denna lag låter oss också, med lite omskrivningar, uppskatta universums ålder. I verkligheten är denna uppskattning inte optimal utan man behöver göra lite mer avancerade beräkningar.

$$v = H_0 \cdot r \Leftrightarrow v = H_0 v t_H \Leftrightarrow t_H = \frac{1}{H_0} \quad (5.2)$$

2 Skalfaktorn

För att mäta universums utveckling använder man **skalfaktorn**. Det är svårt att göra absoluta beräkningar av hur universum ändras och denna är därför relativ en viss epok eller tidsperiod. Skalfaktorn för avstånd är definierad enligt följande:

$$R = r_0 a(t) ; a(t_0) = 1 \quad (5.3)$$

Där $a(t)$ är skalfaktorn och r_0 är avståndet då $t = t_0$, det vill säga det avstånd man använder som bas när man universum dras ut. Detta kan bäst visualiseras genom att betrakta två punkter på en ballong. När man börjar blåsa upp ballongen kommer punkterna ha avståndet r_0 . När man sedan fortsätter blåsa upp den kommer avståndet att öka. Skalfaktorn blir då hur mycket r_0 skalats om till R när man blåst upp ballongen.

2.1 Massdensitet

Om man nu använder den kosmologiska principen, och antar att universum expanderar homogent i alla riktningar, kan man betrakta universums expansion som en sfär. Om man gör detta, finns det tre riktningar: R_x, R_y, R_z . Detta ger om man applicerar skalfaktorn: $a(t)(r_{x0}, r_{y0}, r_{z0}) = \bar{R}$. **Följande är kursivt.** Genom att göra ett koordinatbyte kan man härleda volymen för sfären. Detta görs med sfäriska koordinater. Här betecknar ϕ vinkeln mot z-axeln och θ vinkeln mot xy-planet.

$$\begin{cases} x = |\bar{R}| \sin \theta \cos \phi \\ y = |\bar{R}| \sin \theta \sin \phi \\ z = |\bar{R}| \cos \theta \end{cases}$$

Intervallen ges av följande: $0 \leq \theta \leq 2\pi$ och $0 \leq \phi \leq \pi$. Beloppet av $\bar{R}$ kommer sedan användas i ekvationen. Volymen av sfären man undersöker ges då enligt följande, funktionaldeterminanten motsvarar väsentligen den korrigering av de infinitesimala delarna man summerar i integralen till det koordinatsystem man jobbar i:

$$V = \int_0^{|\bar{R}|} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(|\bar{R}|, \theta, \phi)} \right| d|\bar{R}| d\theta d\phi = \int_0^{|\bar{R}|} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\bar{R}|^2 \sin \phi d|\bar{R}| d\theta d\phi = \frac{4\pi |\bar{R}|^3}{3}$$

Nu ska vi behandla det som kan vara relevant i detta fall. $|\bar{R}| = a(t)|(r_{x0}, r_{y0}, r_{z0})| = a(t)|\bar{r}_0|$. Om vi då sätter in detta i en ekvation får vi följande:

$$V = \frac{4\pi a(t)^3 |\bar{r}_0|^3}{3} \quad (5.4)$$

Vi kan här se att volymen expanderar med en skalfaktor av potencgrad 3. Detta är vad vi förväntar oss eftersom rummet är tredimensionellt. Det som är verkligt relevant här är densiteten av massa ρ_M .

$$\rho_M = \frac{M}{V} = M \cdot \frac{3}{4\pi a(t)^3 |\bar{r}_0|^3} \quad (5.5)$$

Vi vill då undersöka den relativa ändringen av densiteten så vi betraktar kvoten av densiteten i en given tidpunkt och densiteten i den punkt man ansätter som t_0 .

$$\frac{\rho_M(t)}{\rho_{M,0}} = \frac{1}{a(t)^3} \Leftrightarrow \rho_M(t) = \frac{\rho_{M,0}}{a(t)^3} \quad (5.6)$$

Eftersom $a(t) \geq 1$ kommer detta innebära att $\rho(t)$ avtar med tiden. Detta är också i linje med vad vi förväntar oss, när universum expanderar kommer också dess massdensitet bli lägre då skalfaktorn blir större. Denna densitet inkluderar både synlig materia och osynlig materia, alltså mörk materia.

2.2 Bakgrundsstrålningen

Under 1900-talet upptäckte man att universum har **bakgrundsstrålning**. Detta innebär faktiskt att rymden har en temperatur man kan modellera. Svartkroppsstrålning är en bra modell för hur denna strålning fungerar. Det innebär att vi kan använda oss av Wiens lag för att undersöka vad som händer när universum expanderar.

$$\lambda_0 = \frac{b}{T_0}, \quad (5.7)$$

där $b = 2,898$ mm K. Om vi nu också tänker att universums expansion drar ut ljus och bakgrundsstrålning kan vi hitta nya användbara sammanhang genom att modellera detta med dopplerskjutning. Om λ är den våglängd som emitterats och λ_0 är den våglängd som vi kan observera gäller sambandet $\lambda = a(t)\lambda_0$ eftersom vi tänker oss att ljuset sträcks ut med universums expansion. Dopplers lag ger oss då:

$$\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} = z \Leftrightarrow \frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 + z \Leftrightarrow \frac{\lambda_0}{a(t)\lambda_0} = 1 + z \Leftrightarrow a(t) = \frac{1}{1+z} \quad (5.8)$$

Detta samband är det som oftast är relevant när man räknar på, och mäter skalfaktorn. När man vill beskriva skalfaktorn talar man ofta om den kosmologiska rödförskjutningen z . Denna beskriver ungefär hur mycket universum dragits ut. För bakgrundsstrålning kan man använda Wiens förskjutningslag för att finna dess temperatur.

$$\frac{T_0}{a(t)} = T \quad (5.9)$$

Detta är rimligt eftersom T_0 är bakgrundsstrålningens temperatur vid t_0 , det vill säga då det ljuset utsändes, och denna förväntas avta när universum expanderar eftersom strålningsdensiteten sprids ut mer. Man kan också tänka på det som att bakgrundsstrålningens våglängd dras ut.

Enligt relativitetsteorin är massa och energi två sidor av samma mynt så vi kan därför studera densiteten av bakgrundsstrålningen i universum och hur den förändras med a . Vi kan använda Stefan-Boltzmanns lag med strålningskonstanten, modifierad σ . Detta ger följande relation:

$$\rho_R = \frac{4\sigma}{c} T^4 \quad (5.10)$$

Eftersom vi har $T = \frac{T_0}{a(t)}$ kan vi skriva om detta ger då en omskrivning som ger oss hur strålningsdensiteten relaterar till skalfaktorn.

$$\rho_R = \frac{4\sigma T_0^4}{a(t)^4 c} = \frac{\rho_{R,0}}{a(t)^4} \quad (5.11)$$

Viktiga formler

Vi samlar nu de viktigaste formlerna om skalfaktorn när det kommer till räkningar med rödförskjutning.

$$\begin{aligned} \rho_0(1+z)^3 &= \rho(t) \\ a(t) &= \frac{1}{1+z} \\ T_0(1+z) &= T \end{aligned}$$

3 Friedmanns första ekvation

En av de centrala frågorna inom kosmologi är universums geometri eller övergripande kurvatur. Det handlar väsentligen om hur vi kan förstå de geometriska axiomer som kan användas. Faktumet att vi kan ha olika geometrier är något som kommit från den allmänna relativitetsteorin. De tre möjliga geometrierna enligt den kosmologiska principen är följande:

- ★ Platt (Motsvarande euklidisk geometri)
- ★ Sfäriskt (Motsvarande sfäriskt geometri)
- ★ Sadelformat (Motsvarande hyperbolisk geometri)

Den geometri som vi är vana med att räkna på i skolan är euklidisk, men det finns även geometrier på andra ytor. Exempelvis kan man på en sfär ha två linjer som är räta mot samma linje, som sedan möts - medan detta inte går för platta ytor, alltså i euklidisk geometri. Om universum är slutet, d.v.s sfärisk geometri, kommer universum att krympa efter tid eftersom skalfaktorn inte skulle ha en strängt positiv derivata.

3.1 Grundläggande potentialrelation

För att härleda delar av denna ekvation med Newtonsk mekanik kan man betrakta en potentialrelation. Denna består av potentiell energi och rörelseenergi.

$$E_{pot} + E_{kin} = E_{tot}$$

Om man betraktar en punkt på en sfär, där sfären motsvarar universum och all massa innanför är universums massa M , man befinner sig även avståndet R från centrum. Vi vet från banmekaniken att vi då kan uttrycka detta som:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = E$$

Ett annat utfall ur allmän relativitet är att den totala energin är beroende av Universums inboende geometri, vi uttrycker detta som

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{1}{2}mkc^2r_0^2, \quad (5.12)$$

där konstanten k antar endast värden 1, -1 , 0 . $k = 1$ om universum är slutet/sfäriskt, $k = 0$ om det är platt/euklidiskt och $k = -1$ om det är öppet/hyperboliskt. Beroende på dess värde kommer den totala energin i universum då att vara positiv ($k = -1$), negativ ($k = 1$) eller 0 ($k = 0$). Då energin är negativ kommer universum krympa efter en tid, om energin är positiv eller 0 kommer universum fortsätta att växa för evigt. Observationer med ett flertal teleskop (men viktigast av WMAP) har visat att $k = 0$ med hög precision.

3.2 Hubble och omskrivning

Vi kan skriva om Hubbles lag med hjälp av skalfaktorn. $r = a(t)r_0$ vilket ger tidsderivatan $v = \frac{dr}{dt} = \dot{a}(t)r_0$. Vi får då att Hubbles lag ger följande:

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (5.13)$$

Vi kan nu bearbeta potentialuttrycket med ett antal omskrivningar, vi vet bland annat att $M = V\rho = \frac{4}{3}\pi(a(t)r_0)^3\rho(t) = \frac{4}{3}\pi r(t)^3\rho(t)$. Med dessa omskrivningar och genom att dividera med m får vi följande, där andra uttrycket följer vid division med $a(t)^2$:

$$v^2 - \frac{2GM}{r_0 a(t)} = -kc^2 r_0^2 \Leftrightarrow \quad (5.14)$$

$$H^2 - \frac{8G\pi}{3}\rho = -\frac{kc^2}{a(t)^2}. \quad (5.15)$$

ρ i detta uttrycket är summan av både massdensiteten och strålningsdensiteten i Universum eftersom den allmänna relativitetsteorin säger att all energi utför dragningskraft. Eftersom H innehåller en tidsderivata av a i sig kan denna relationen ses som en differentialekvation med vilken man kan lösa universums utveckling. Detta är det vi kallar för **den första Friedmann-ekvationen**.

Det finns olika modeller för hur universum utvecklats men den hittills bästa är Λ_{CDM} . Denna modell innehåller någonting som heter **mörk energi**, betecknas Λ . Λ kallas även för **den kosmologiska konstanten** då den först formulerades av Einstein på 20-talet. Denna har uppkommit för att korrigera relationen vi har ovan för att kompensera för densitet vi inte kan observera. **Observera!** Detta är inte samma som mörk materia som bara är vanlig materia som är osynlig. Densiteten av mörk energi antas vara konstant oavsett universums storlek. Man kan alltså se det som en densitet av själva rymden i sig, vilket är hur man försöker förklara densiteten med kvantfysik. Med detta skriver vi om Friedmann-ekvationen till

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a(t)^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (5.16)$$

dock brukar vi inkludera Λ i ρ som en del av den totala densiteten. En annan viktig konstant är den kritiska densiteten ρ_{cr} . Denna kan man få genom att observera precis den energi som krävs för att något på randen av sfären vi betraktar ska kunna undkomma. Detta motsvarar också då $k = 0$ för vår tidigare ekvation. Det följer då att den kritiska densiteten är:

$$\rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{8G\pi} \quad (5.17)$$

3.3 Densitetskvoter

Ett sätt som man ofta beskriver kosmologiska storheter är med **densitetskvoten** Ω . Denna är definierad som den relativa densiteten av något bidrag genom den kritiska densiteten. Det är ett bra mått eftersom man då lätt kan avgöra om universum är öppet eller slutet.

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cr}} \quad (5.18)$$

Om man antar att den totala densiteten är den kritiska densiteten, d.v.s att universum har platt geometri, så kommer dessa bidrag av densitetskvoter bli 1. De bidrag man får då är från mörk energi, materia och strålning. Relevant är att det också finns bidrag från universums kurvatur, men denna är 0 eftersom universum antas vara platt.

$$\Omega_\Lambda + \Omega_M + \Omega_R = 1 \quad (5.19)$$

Om universum inte är platt och energin därav inte är noll kan man inkludera den extra termen som en densitetskvot Ω_k . Den behandlas härnäst som en extra energidensitet.

3.4 Densitetskvoter och Friedmann

För att göra räkningar lättare kan man skriva om Friedmann-ekvationen i termer av densitetskvoter och skalfaktorer. Dessutom har vi också funnit tidigare relationer för olika former av energi som kommer att underlätta detta. Följande är känt:

$$\rho = \rho_R + \rho_m + \rho_\Lambda \Leftrightarrow \rho = \frac{\rho_{R,0}}{a(t)^4} + \frac{\rho_{m,0}}{a(t)^3} + \rho_\Lambda$$

Med detta kan vi skriva om Friedmanns första ekvation enligt:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_R a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_k a^{-2} \quad (5.20)$$

Algebraisk omskrivning ger då att:

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\Omega_R a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_k a^{-2}}$$

Om man då sedan multiplicerar med a får man en separabel differentialekvation enligt:

$$\dot{a} = H_0 \sqrt{\Omega_R a^{-2} + \Omega_m a^{-1} + \Omega_\Lambda a^2 + \Omega_k}$$

Denna kommer då ge upphov till en integral. Denna kan man undersöka för att se hur skalfaktorn ser ut i olika skeden:

$$tH_0 = \int_0^{\hat{a}} \frac{1}{\sqrt{\Omega_R a^{-2} + \Omega_m a^{-1} + \Omega_\Lambda a^2 + \Omega_k}} da \quad (5.21)$$

Under olika epoker kan man göra antaganden som underlättar integralen och ger en uppskattning av skalfaktorns värde och proportionalitet. Exempelvis i ett universum där massa dominerar finner vi att majoriteten av energi är i form av massa. Då kan vi använda att $\Omega_m \gg \Omega_R$ och att $\Omega_m \gg \Omega_\Lambda$. Detta ger att alla faktorer utom Ω_m är försumbara, kan visas om man betraktar att summan av densitetskvoterna ska vara 1. Vi får då en förhållandevis enkel integral:

$$tH_0 = \int_0^{\hat{a}} \frac{1}{\sqrt{\Omega_m a^{-1}}} da = \frac{2\sqrt{\Omega_m}}{3} \hat{a}^{3/2}$$

Detta ger slutligen den proportionalitet som skalfaktorn har i ett massdominerat universum.

$$a(t) \propto t^{2/3} \quad (5.22)$$

Genom att mäta bland annat supernovor i galaxer långt borta kan vi mäta storlekarna av densitetskvoterna. Med moderna instrument har man funnit $\Omega_k \approx 0$, $\Omega_R \approx 0$, $\Omega_M \approx 0,32$, $\Omega_\Lambda \approx 0,68$.

Viktiga relationer

$$\Omega_\Lambda + \Omega_M + \Omega_R + \Omega_k = 1$$

$$\rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{8G\pi}$$

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{cr}}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{a(t)^2}$$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_R a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda + \Omega_k a^{-2}$$

4 Uppgifter

- 5.1** Bestäm Hubblekonstantens (H_0) värde i SI-enheter. Vad är den enklaste uppskattningen för universums ålder?
- 5.2** Bestäm hur ett universum dominerat av strålning expanderar (d.v.s $\Omega_R \gg \Omega_m$ & Ω_Λ).
- 5.3** Bestäm hur mycket mindre universum var när det fanns lika mycket materia som strålning i universum. $\Omega_M = 0,32$, $\Omega_R = 8 \cdot 10^{-5}$
- 5.4** När rekombinationen (när alla elektroner parades med protoner) skedde var universums temperatur ca 3000 K. Under denna process emitterades även strålning från elektronen bindningsenergi i våglängden 912 Å (91,2 nm). Vad är dessa fotoners våglängd idag? Temperaturen idag är ca 2,7 K.
- 5.5** Melvin experimenterar på ett mjölkpaket ($m = 1$ kg, $V = 1$ l) och gör det till sitt egna universum. Han observerar att det expanderar med Hubblekonstanten $H_0 = 10^{-3} \text{s}^{-1}$. Vad kommer mjölkpaketets framtid att vara och vilken geometri har mjölkuniversumet?
- 5.6** Fusion av väteatomer till helium kräver ungefär att temperaturen är $T_0 \approx 10^9$ K och att baryondensiteten är $\rho_{b,0} \approx 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, en baryon är en subatomärpartikel - proton, elektron m.m. Dagens baryondensitet är $\rho_b = 4.17 \cdot 10^{-28} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Beräkna temperaturen för universums bakgrundsstrålning idag.
- 5.7** Visa att följande omskrivning av Friedmanns första ekvation stämmer, där $\Lambda = 3 \frac{H_0^2}{c^2} \Omega_\Lambda$:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_R \cdot a(t)^{-4} + \Omega_m \cdot a(t)^{-3} + \Omega_\Lambda$$

- 5.8** (IOAA) Observations indicate that the expansion of the Universe is accelerating. Fluctuations of the cosmic microwave background favour a flat (Euclidean) geometry, in which the total mass density (i.e. density of matter and equivalent mass density of all forms of energy) should be equal to the so-called critical density:

$$\rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

where H_0 is the present value of the Hubble constant. However, the total density of matter (luminous and dark) is estimated at

$$\rho_{m,0} \approx 2.8 \cdot 10^{-27} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

To resolve this discrepancy, the standard cosmological model assumes that the Universe is filled with a mysterious 'dark energy' of constant energy density E_Λ . Determine the value of E_Λ and calculate for which redshift in the past the energy density equivalent to matter was equal to the density of dark energy. Neglect the contribution of electromagnetic radiation.

Kapitel 6

Statistik

1 Dataanalys för IOAA

Inom astronomi och astrofysik behöver man kunna hantera stora mängder data. NASA uppskattade bland annat att James Webb Space Telescope (JWST) skulle producera 235 Gigabites varje dag. För att förstå vad denna data faktiskt betyder är dataanalys viktigt. Det är därför IOAA har en deltävling för denna gren som motsvarar en fjärdedel av den totala poängmängden. År 2023 var detta 150 poäng. Det är därför viktigt, om man avser att göra bra ifrån sig i tävlingen, att ha koll på grunderna för inom dataanalys och statistik. Mycket av informationen i detta kapitel är baserad på läroboken "Sannolikhetsteori och statistikteori med tillämpningar" av G. Blom et. al. och kursen Matematisk statistik, allmän kurs vid Lunds Tekniska Högskola HT2024, undervisad av Johan Lindström.

1.1 Stokastiska variabler

För att förstå hur en variabel är fördelad är det viktigt att förstå vad en stokastisk variabel är.

En stokastisk variabel har en definitions mängd bestående av händelser och en värdemängd bestående av något utfall som associeras med en sekvens av händelser. Denna kan ha olika fördelningar där olika utfall har olika sannolikhet enligt fördelningen

För att detta ska illustreras bättre ska jag använda ett klassiskt exempel: tärningskast. Låt oss säga att vår stokastiska variabel X motsvarar antalet jämna tal som slagits. Om vi då antar att man slår 5 kast får vi ett utfallsrum $X \in \{0, \dots, 5\}$ där antalet jämna tal varierar på denna mängd. Det betyder att variabeln X är fördelad med någon fördelning. Vi kan bestämma denna fördelning till en binomialfördelning genom att betrakta sannolikheten att slå ett jämnt tal: $P(2,4,6) = 1/3$. Om vi betraktar alla möjliga sådana utfall, det vill säga möjliga kombinationer, kan vi bestämma sannolikheten för varje utfall. Detta kan göras med binomialsatsen. Dessa är diskreta händelser och varje utfall har därför en diskret sannolikhet som ges av dess fördelningsfunktion, $p_X(k)$ där k är utfallet man vill ha sannolikheten för. Detta exempel kommer ha fördelningsfunktionen, $p = 1/3$ och $n = 5$:

$$p_X(k) = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$$

Detta kan också skrivas $X \in \text{Bin}(5, 1/3)$. Vi kan nu beräkna sannolikheten för att få tre jämna på 5 kast:

$$p_X(3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 0.1646$$

Detta är bara ett exempel på en fördelning. Det finns många andra viktiga fördelningar med egenskaper som passar olika tillfällen. I regel kan man säga att diskreta händelser med en given sannolikhet där ett antal försök sker följer binomialfördelningen. Viktigt tillägg är att den totala sannolikheten för alla utfall alltid skall vara 1.

1.2 Kontinuerlig stokastisk variabel

Dessa är inte lika intuitiva som diskreta variabler, istället får man tänka sig att en stokastisk variabel X har ett kontinuerligt utfallsrum. Det betyder att det i princip finns oändligt många utfall. Sannolikheten för ett unikt utfall blir därför svårt att beskriva. Istället använder man täthetsfunktionen för att beräkna sannolikheten att värdet för X ligger mellan två olika värden. Täthetsfunktionen $f_X(x)$ följer förhållandet:

$$P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

Likt detta är sannolikheten att en kontinuerlig stokastisk variabel X ligger mellan a och b , om X har täthetsfunktionen $f_X(x)$:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

För att ge ett exempel på detta, anta att $X \in \text{Exp}(2)$. Detta betyder att X är exponentialfördelat med täthetsfunktionen $f_X(x) = 2e^{-2x}$, $x \geq 0$ och $f_X(x) = 0$, $x < 0$. Vi ska nu beräkna sannolikheten att $X < 1$.

$$P(X < 1) = \int_0^1 2e^{-2x} dx = [-e^{-2x}]_0^1 = 1 - e^{-2} = 0.86466$$

2 Normalfördelningen och liknande

Det finns många olika kontinuerliga fördelningar som en stokastisk variabel kan följa, men den viktigaste i detta fall är normalfördelningen. Den har täthetsfunktionen:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Eller för den standardiserade $N(0,1)$ normalfördelningen:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Där μ är normalfördelningens väntevärde, d.v.s det värde som X förväntas anta - och det värde som för normalfördelningen motsvarar dess maximum. Standardavvikelsen är σ och beskriver spridningen på datan. En normalfördelat variabel kan skrivas $X \in N(\mu, \sigma)$. För att bestämma sannolikheten för $X < a$ kan man beräkna följande.

$$P(X < a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Detta är ofta svårt eftersom funktionen man integrerar saknar primitiv funktion. Istället är det relevant att använda tabellvärden eller miniräknare. Det som är relevant för IOAA är kvantiler.

2.1 Kvantiler

En kvantil definieras som det λ_α som ger att:

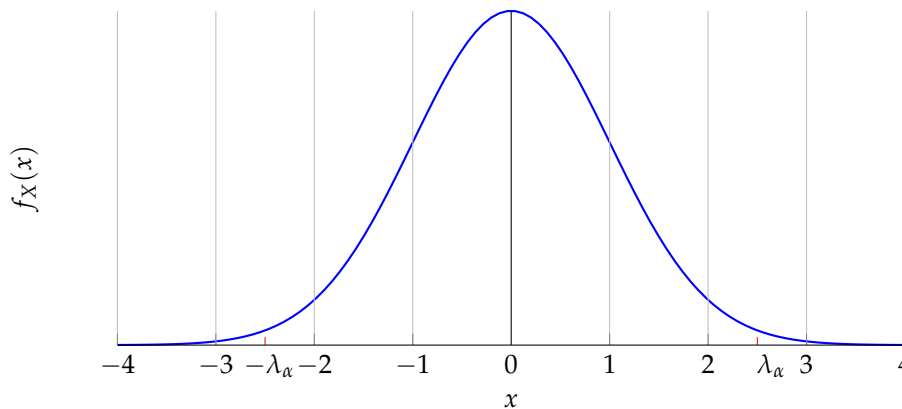
$$P(X < \lambda_\alpha) = 1 - \alpha$$

Där α motsvarar den resterande arean under kurvan. Om $\alpha = 0.05$ betyder det att sannolikheten att $X < \lambda_\alpha$ är 95%.

Här kan det vara värt att beskriva några av normalfördelningens egenskaper för kvantiler. Enhetsnormalfördelningen, alltså $X \in N(0,1)$ har en funktion som kallas phi-funktionen som beskrivs som följande:

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= P(X < x), \quad X \in N(0,1) \\ \Phi(-x) &= 1 - \Phi(x)\end{aligned}$$

Detta är relevant för kvantiler. Om vi vill finna två λ sådant att sannolikheterna i båda svansarna är lika stor räcker det med att finna λ_α eftersom den negativa kvantilen på andra sidan då kommer vara $-\lambda_\alpha$ vilket kan ses i följande figur.



Normalfördelade variabler är alla på samma form och kan därför normeras. Låt $Y \in N(\mu, \sigma)$, för att kunna använda phi-funktionen på denna kan vi först inse att $Y = \sigma X + \mu$, $X \in N(0,1)$, d.v.s väntevärdet är förskjutet μ och spridningen är σ bredare. Om man då vill finna $P(y_1 < Y < y_2)$ kan detta beräknas.

$$P(y_1 < Y < y_2) \iff P(y_1 < \sigma X + \mu < y_2) \iff P\left(\frac{y_1 - \mu}{\sigma} < X < \frac{y_2 - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y_2 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{y_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

Detta betyder att man kan normera normalfördelade variabler på detta sätt. Detta kommer användas vid intervall.

2.2 Skattningar av μ och σ

En skattning är det uppskattade värdet av en variabel baserad på uppmätt data. Man är ute efter den bästa skattningen för en given variabel. För att få denna kan man använda sig av minsta kvadratmetoden (MK) eller Most Likely metoden (ML). ML kommer inte diskuteras men en grundläggande beskrivning av MK för linjär regression kommer diskuteras.

Om data väljs slumpmässigt ur något som antas vara normalfördelat kommer summan också

vara normalfördelad. Summor av många jämnt fördelade variabler är enligt en sats som kallas Centrala gränsvärdesatsen också normalfördelade då antalet summerade variabler blir stort. Väsentligen vad detta betyder är att medelvärdet för de dataset vi kommer stöta på också är normalfördelade, eller kan uppskattas som normalfördelade (binomialfördelningen kan bland annat approximeras som normalfördelad under vissa omständigheter). För att veta hur sin normalfördelning ser ut vill man ta reda på väntevärdet och standardavvikelsen. Följande räkningar är kursiva men kan vara intressanta om man är intresserad.

Antagandet här är att varje $X_i \in N(\mu, \sigma)$, man använder också några regler för att räkna på väntevärden och varians i linjärkombinationer. $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ och $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y)$.

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

Variansen kan beräknas enligt följande, standardavvikelsen är roten ur variansen. Det finns en term som kallas kovariansen med i en sådan räkning men om variablerna antas oberoende så är denna 0.

$$V(\bar{x}) = V\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Detta ger oss standardavvikelsen $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Den skattning av väntevärdet som är bäst är medelvärdet av data. **Skattningar kommer att betecknas med * framöver.** Det ger oss $\mu^* = \bar{x}$. Denna stokastiska variabel kommer då att vara normalfördelad enligt $\bar{X} \in (\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Detta gäller då σ är känt. Om denna inte är det måste denna också skattas. Den optimala skattningen för σ brukar först härledas för σ^2 och kallas s^2 .

$$(\sigma^2)^* = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Detta ger oss då skattningen av σ , $s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$. Den standardavvikelse man då får för medelvärdet $\bar{X}$ är $\frac{s}{\sqrt{n}}$.

2.3 Intervallskattning

Vid skattning av det sanna väntevärdet kan man anta att skattningen ligger någonstans innanför ett intervall. Intervallet man väljer ger säkerheten på intervallskattningen. Om man vill ha en tvåsidig skattning av konfidsgrad α , d.v.s att sannolikheten att det verkliga väntevärdet ligger innanför intervallet är α , tar man en kvantil $\lambda_{\frac{\alpha}{2}}$ som gör att sannolikheten för att en variabel ligger på intervallet är α . Man kan då skapa ett intervall för $\bar{X}$. Om μ är det sanna väntevärdet.

$$\mu - \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu + \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Här har man dessutom relationen för sannolikheten:

$$P\left(\mu - \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu + \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Om man nu flyttar om sådant att $\bar{X}$ och μ byter plats förändras inte utseendet. Detta kan göras bland annat genom att betrakta fallen av $<$ eller $>$ individuellt och sedan flytta över variablerna och multiplicera med -1 .

$$\bar{X} - \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Vi har nu skapat ett intervall för det sanna värdet för väntevärdet. Sannolikheten att detta värde ligger på intervallet är då som tidigare nämnt α . Intervallet ges:

$$I_{\mu} = [\bar{x} - \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$$

Detta gäller då vi har ett känt σ . Om man behöver skatta denna får man inte längre en normalfördelad variabel, utan snarare än så kallad Student-t fördelad variabel. Denna går mot att vara normalfördelad för stora dataset, men åtminstone för $n < 100$ bör man inte göra denna uppskattning. Följande räkning kommer vara kursiv men visar väsentligen bara varför detta stämmer.

Detta kan ses som översikt även för vissa introduktionskurser till statistik på universitetet så rekommenderas endast vid specialintresse.

Låt kvadratsumman Q vara $Q = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Vi ska först visa att en kvadratsumma är χ^2 -fördelad. Låt $Y = (\frac{X}{\sigma})^2$, $X \in N(0, \sigma)$.

$$P(Y < y) = P(-\sqrt{y} < \frac{X}{\sigma} < \sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - (\Phi(-\sqrt{y})) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1$$

Detta ger oss fördelnings funktionen för Y , d.v.s $F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(y) dy$. Målet är att visa att Y har samma täthetsfördelning som χ^2 fördelningen genom att derivera denna.

$$\frac{d(2\Phi(\sqrt{y}) - 1)}{dy} = \frac{2}{2\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} = \{n = 1\} = \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot \sqrt{\frac{2}{y}} e^{-\frac{y}{2}}$$

Detta visar att Y är χ^2 -fördelat. En summa av sådana variabler skulle därför också bli χ^2 fördelat, vilket kan visas med mer avancerad matematik. Här kan man då ta med sig att $Q \in \chi^2(n-1)$.

Om vi nu betraktar normeringen av skattningen av väntevärdet i förhållande till det sanna värdet. $\bar{X} = \mu + \lambda_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$ gäller vid normering att man får $\frac{\bar{X} - \mu}{(\frac{s}{\sqrt{n}})}$. Eftersom s är skattad kommer denna inte längre vara normalfördelat.

Om man introducerar en ny stokastisk variabel T får man:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{(\frac{s}{\sqrt{n}})}$$

Om man sedan betraktar att varje $X_i = \mu + \sigma \xi_i$, där $\xi_i \in N(0,1)$, får man att $\bar{X} = \mu + \sigma \bar{\xi}$ får man att varje $X_i - \bar{X} = \sigma(\xi_i - \bar{\xi})$. Detta ger då med expansion av s , byter även ut $\bar{X}$ mot dess expanderade form:

$$T = \frac{\sigma \bar{\xi}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \sigma^2 (\xi_i - \bar{\xi})^2} / \sqrt{n}} = \frac{\bar{\xi}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2} / \sqrt{n}}$$

Väsentligen kan en normalfördelat variabel genom en χ^2 -fördelat variabel sägas vara t-fördelat. Hela beviset kan finnas i slutet av detta kapitel.

I fallet där man behöver skatta σ bör man istället använda kvantilen man får från t-fördelningen. Detta görs genom miniräknare eller tabell, vissa kan man ungefär memorera. Fördelningen har också frihetsgrader motsvarande $n - \text{\#skattade variabler}$, sådant att kvantilen för ett tvåsidigt intervall blir, för en skattad variabel i väntevärdet, $t_{\alpha/2}(n-1)$. Detta ger att man får intervallet för väntevärdet vid skattad standardavvikelse till:

$$I_\mu = [\bar{x} - t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}}]$$

Detta är typen av intervall man kommer stöta på om man får dataset utan givna standardavvikelser, vilket ofta är fallet på IOAA.

3 Linjär regression och osäkerhetsintervall

För att skapa en modell baserad på data kan man använda linjär regression för att skatta parametervärden för koefficienter för olika förklarande variabler. Enkel linjär regression är grundad i att skatta α & β sådant att väntevärdet för data hamnar på den linjära skattningen.

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i \quad (6.1)$$

$$y = \alpha^* + \beta^* x \quad (6.2)$$

Ekv. 1 motsvarar den oskattade datapunkten och Ekv.2 motsvarar det skattade linjära sambandet. y kommer vara det man vill mäta och x den förklarande variabeln, t.ex om man har en sträcka som beror av tiden man färdats, då är tiden den förklarande variabeln och hastigheten β^* och α^* startpunkten. Om den linjära regressionen har givit bra skattningar, förväntar man sig att residualen, ϵ_i , ska vara slumpmässig och därför normalfördelad. Det betyder egentligen att man förväntar sig slumpfel i mätningar, vilket inte motsvarar systematiska fel. Man väntar sig alltså att $\epsilon \in N(0, \sigma)$. Har man normalfördelning kring annan variabel här kan det visa på ett systematiskt fel. Felintervall ska nu beskrivas. För att bestämma väntevärden för β och α kan man använda sig att lineär algebra. Om man inte känner sig bekväm med detta kan man även dra en linje som är välanpassad till datapunkterna. Skattningen för interceptet och för lutningen på linjen

Väntevärden ges av minsta kvadratmetoden. Vad den gör är i princip en ortogonal projektion av en datapunkt på det rum som den linjära anpassningen spänner upp sådant att man i sin modell kommer så nära alla punkter som möjligt.

$$\mathbf{V}^* = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$$

Här består $\mathbf{V}^*$ av de skattade värdena för varje punkt.

Beräkning av variansen för det skattade värdet på linjen kan göras för att finna spridningen.

$$V(y_0) = V(\alpha^* + \beta^* x_0) = V(\alpha^*) + x_0^2 V(\beta^*)$$

Väntevärdet för linjen kommer att vara just y_0 .

3.1 Linjärisering av data och intervall

För att kunna finna konstanter som man uppskattar är det ibland bra att linjärisera datan för att effektivt kunna plotta och skatta värden på konstanter. Under IOAA förekommer ofta icke-linjär data, denna är svårare att finna relationer för om man inte linjäriserar.

Linjärisering av data

Om data förekommer på någon form där relationen går att linjärisera bör man göra detta under IOAA. Målet är att få något icke-linjärt på linjär form. Några exempel följer.

$$Cx^k = R \longrightarrow \ln C + k \ln x = \ln R$$

Här har man data för x och dessutom svarande värde för funktionen som plottas. Detta ger att man nu endast kan kolla på lutningen av linjen k och skärningspunkten C för att finna konstanterna i relationen. Andra linjäriseringar kan göras om man skulle ha små vinklar mellan två punkter, i t.ex en svängning.

$$K \sin \alpha \approx K \tan \alpha \approx K\alpha, \quad \alpha \ll 1$$

Intervall för transformationer

En intervallskattning med signifikansgraden α kan transformeras till ett intervall för den transformerade variabeln givet att $g : y \rightarrow g(y)$.

$$I_y = [y_1, y_2]$$

Det transformerade intervallet ges genom att utvärdera $g(y)$ i punkterna y_1 och y_2 .

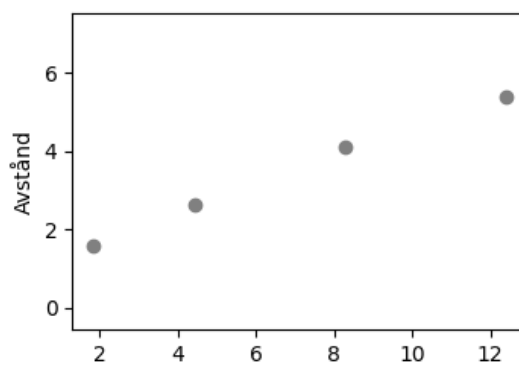
$$I_{g(y)} = [g(y_1), g(y_2)]$$

Exempel

Antag att man har data givna.

Tid (yr)	1.83	4.43	8.3	12.4
Avstånd (AU)	1.58	2.64	4.12	5.41

Tabell 6.1: A table with three values

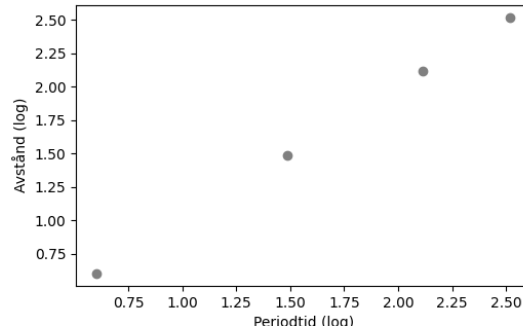


Figur 6.1: Datapunkterna i tabellen, avstånd beroende av tid

Här kan man gissa att sambandet inte är linjärt och därför bör man logaritmera alla datapunkterna för att finna konstanten som beskriver relationen.

$$\ln a = c \ln T$$

Då får datan ett linjärt utseende.



Figur 6.2: Logaritmerade värden för datapunkterna

KOMMER MER.

4 Bevis och Kursivt material

4.1 T-fördelningen

Här kan det vara värt att ge täthetsfunktionen för χ^2 -fördelningen först för att se vad vi har att jobba med. Vi har även en $N(0,1)$ fördelad variabel i täljaren till vår stokastiska variabel. Bevised följer delvis det som finns på hemsidan statproofbook (Januari 2025).

$$f_{\chi^2}(x) = \frac{x^{f/2-1}}{2^{f/2}\Gamma(f/2)} e^{-x/2}, x \geq 0$$

Frihetsgraden f motsvarar oftast $n - \text{\#skattade variabler}$. Gammafunktionen är också värd att skriva ut:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

Den har även fördelningsfunktionen:

$$f_\Gamma(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}, X \in \text{Gam}(a,b)$$

För beviset kan man inledningsvis säga att man är ute efter att visa att en variabel T har samma täthetsfunktion som t-fördelningen, eller helt enkelt visa vad denna har för fördelningsfunktion. Vi hade tidigare att:

$$T = \frac{\bar{\xi}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi})^2} / \sqrt{n}}$$

Om man skriver om detta sådant att de olika fördelade variablerna ses som en ny stokastisk variabel kan man skriva:

$$\begin{cases} T = \Psi \sqrt{\frac{n}{\Xi}} \\ W = \Xi \end{cases}$$

Detta ger för omskrivning sådant att man får Ψ och Ξ .

$$\begin{cases} \Psi = T \sqrt{\frac{\Xi}{n}} \\ \Xi = W \end{cases}$$

Dessa variabler antas oberoende av varandra, vilket ger att deras kombinerade täthetsfunktion kan separeras.

$$\begin{aligned} f_{\Psi\Xi}(\psi, \xi) &= f_{\Psi}(\psi) f_{\Xi}(\xi) \left| \frac{\partial(\Psi, \Xi)}{\partial(T, W)} \right| = \{\text{Variabelbyte tillbaka till ursprungsvariablerna}\} = \\ &= f_T(t) f_W(w) \end{aligned}$$

Här ger variabelbytet att man behöver använda funktionaldeterminanten för variablerna. Funktionaldeterminanten är:

$$\left| \frac{\partial(\Psi, \Xi)}{\partial(T, W)} \right| = \sqrt{\frac{\Xi}{n}}$$

Fördelningsfunktionerna för Ψ & Ξ är $N(0,1)$ respektive $\chi^2(n)$. Med den totala täthetsfunktionen kan man nu bestämma:

$$f_{\Psi}\left(t\sqrt{\frac{w}{n}}\right)f_{\Xi}(w)\sqrt{\frac{w}{n}} = f_{\chi^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2w}{2n}}\frac{w^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}e^{-w/2}\sqrt{\frac{w}{n}}$$

Nu kan man finna den marginella täthetsfunktionen för T genom att integrera med avseende på w från 0 till ∞ i detta fall. Detta betyder väsentligen att man får tillbaka sannolikheten endast för t för alla möjliga w .

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2w}{2n}}\frac{w^{n/2-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}e^{-w/2}\sqrt{\frac{w}{n}}dw \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)\sqrt{2\pi n}} \int_0^\infty e^{-\frac{w}{2}\left(\frac{t^2}{n}+1\right)}w^{\frac{n-1}{2}}dw \\ &= \begin{cases} p = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{n}+1\right) \\ q = \frac{n+1}{2} \end{cases} \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)\sqrt{2\pi n}} \int_0^\infty e^{-wp}w^{q-1}dw \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)\sqrt{2\pi n}} \frac{\Gamma(q)}{p^q} \int_0^\infty \frac{p^q}{\Gamma(q)}e^{-wp}w^{q-1}dw \end{aligned}$$

För en variabel som är $W \in \text{Gam}(q, p)$ kommer den totala sannolikheten vara 1 om man integrerar från 0 till ∞ eftersom sannolikheten att man får något i utfallsrummet är 1. Det ger:

$$\int_0^\infty \frac{p^q}{\Gamma(q)}e^{-wp}w^{q-1}dw = 1$$

Det ger då omskrivet tillbaka till originalvariabler:

$$f_T(t) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)\sqrt{2\pi n}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{n}+1\right)\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{2^{n/2}\Gamma(n/2)\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{n}+1\right)\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Med ytterligare förenklingar, tvåpotenserna tas ut om man hanterar $\frac{1}{2}$ termen och dess potens. Då får man slutligen:

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}} \left(\frac{t^2}{n}+1\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Detta är t-fördelningens täthetsfunktion.

Kapitel 7

Facit till uppgifter

1 Astronomi

- 1.1 5,2 pc
1.2 15 pc resp. 30 pc
1.3 $3,8 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}$
1.4 46 000 år
1.5 4,03 mag.
1.6 0,84
1.7 -2,7 mag.
1.8 $2,1^\circ$
1.9 $L = 3,7 \times 10^{31} \text{ W}$, $M = -7,7$, $m = -2,3$, $\mu = 5,45$, $F_{\text{yta}} = 3,5 \times 10^{11} \text{ W m}^{-2}$, $F_{\oplus} = 2,0 \times 10^{-7} \text{ W m}^{-2}$, $\lambda_{\text{max}} = 103 \text{ nm}$
1.10 Andromedagalaxen är inte ett punkto-
bjekt utan utspridd på en större vinkelarea
på himlen. Detta innebär att våra ögon
inte kommer att se allt koncentrerat. Ab-
solut magnitud går att använda matema-
tiskt men är enbart fysikaliskt för punkt-
objekt.
1.11 Vi skulle underskatta radien med en fak-
tor av $2,8 \cdot 10^{-8}$ om vi inte tar hänseende
för extinktion.
1.12 Om 9700 år är stjärnan 1,16 pc bort.
1.13 $m = 33,5$
1.14 63 000 km/s. Ja, Milles får köra hur mycket
han vill.
1.15 36 km s^{-1}

- 1.16 3.37 mag.
1.17 0,456 pc från solen.
1.18 a) $d = 179 \text{ pc}$, $L = 0,273 L_{\odot}$, $R = 1,24 R_{\odot}$ b)
 $a = 0,39 \text{ AU}$, $R = 5,9 R_{\oplus}$ c) 49° C
1.19 a. $1,896 \cdot 10^5 M_{\odot} = 3,771 \cdot 10^{35} \text{ kg}$. b.
0.689 pc.
1.20 a. 30 pc b. $0,1 L_{\odot}$ c. 3500 K, det är en
huvudseriestjärna, röd dvärg. d. $M =$
 $0,5 M_{\odot}$, $R = 0,7 R_{\odot}$ e. 83 km/s 6. Om 190
000 år kommer den vara 2,2 pc från so-
len. f. 20h.

2 Observationell Astronomi

- 2.1 6 200 km
2.2 (För bild med norr åt vänster) Sidorna är:
 $a = 90^\circ - \delta$, $b = 90^\circ - \phi$, $c = 90^\circ - a$ med vinklar
 $A = 360^\circ - \text{azimut}$, $C = \text{tidsvinkel } H$
2.3 17 000 km
2.4 $21,1^\circ$ över horisonten
2.5 Tidsvinkeln är $H = 64,1^\circ$
2.6 Vega går upp vid $A = 27,1^\circ$
2.7 Skuggan är 1,11 m
2.8 Arias skugga är 2,79 m
2.9 15 april
2.10 Solens deklination är $19,5^\circ$
2.11 Bevis

2.12 Latitud är $78,5^\circ$ och solens deklination är $+17,2^\circ$

2.13 8,3 dagar

2.14 Latituden är 80° och solens deklination är 20°

2.15 a. $4,2458 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,284 \text{ AU}$. b. $2,52 \cdot 10^{17} \text{ s} = 8,00 \cdot 10^9 \text{ år}$.

2.16 Den går att se med teleskopet

3 Banmekanik

3.1 $1,0 \cdot 10^{-25} \text{ m}$

3.2 $3,83 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,0256 \text{ AU}$

3.3 a) $7,37 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ b) Nej, så länge skottet missar månen och jorden.

3.4 7,9 m/s

3.5 a) 12 km/s b) 2,6 dygn c) 0,24

3.6 a) 3200 ton b) 7800 ton

3.7 3,7 km/s

3.8 Objektet är ett svart hål som väger $7,00 \cdot 10^{36} \text{ kg} = 3,52$ miljoner solmassor. Det svarta hålets radie är $10,4 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,0695 \text{ AU}$.

3.9 14,0 km/s

3.10 a) $28,5 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,191 \text{ AU}$, b) 63 000 km = $0,901 R_{\oplus}$ c) 881 kg/m^3 d) $15,5 \text{ m/s}^2$ e) 0,340

3.11 3,2 miljoner år

3.12 8 400 stjärnor

3.13 Hyperbolisk (över flykthastighet)

3.14 9 mm

3.15 Stjärnorna har massorna $16M_{\odot}$ och avståndet 8 pc.

3.16 $129,3M_{\odot}$

3.17 7,6 ton bränsle

3.18 $96\,222\,000 \text{ kg m s}^{-1}$

4 Astrofysik

4.1 a) Huvudserie (Röd dvärg), b) Vit dvärg, c) Röd superjätte, d) Huvudserie.

4.2 Den starkares radie är ca 5 gånger större.

4.3 Stjärnan blir ca 120 gånger ljusstarkare.

4.4 597 kpc

4.5 133 pc

4.6 Den var inte typ 1a.

4.7 6,9 Mpc

4.8 905,4 keV

4.9 a. B, A, C från yngst till äldst. b. 70 miljoner år

4.10 (Saknas)

4.11 (Saknas)

4.12 (a)

$$f_{\text{GW}} = \sqrt{2,8 \frac{GM_{\odot}}{\pi^2 a^3}}.$$

(b) 1 och 2 ligger i det rimliga spannet

(c) Modell 2

(d) $7.2 M_{\odot}$

5 Kosmologi

5.1 $H_0 = 2.27 \text{ s}^{-1}$, $t_0 = 14 \text{ Gyr}$

5.2 $a \propto \sqrt{t}$

5.3 $a = 2,5 \cdot 10^{-4}$

5.4 101 μm

5.5 Det är hyperboliskt och kommer rivas sönder av sin egen expansion.

5.6 3.4 K

5.7 Algebra

5.8 $E_{\Lambda} = 5,8 \cdot 10^{10} \text{ J m}^{-3}$, $z = 0,31$

6 Statistik

Litteratur

- [1] Chandra X-ray Observatory. *Pulsating Variable Stars and the Hertzsprung-Russell (H-R) Diagram*. Hämtad 27 april 2025. 2012. URL: https://chandra.harvard.edu/edu/formal/variable_stars/bg_info.html.
- [2] *Edwin Hubble's Original Tuning Fork Diagram*. Image featured in the Galaxies Lab section of the ASTR 1020L course at Georgia State University. n.d. URL: <https://sites.gsu.edu/astr1020lab/galaxies-lab/>.
- [3] Encyclopaedia Britannica. *Nuclear Binding Energy*. Accessed: March 30, 2025. 2025. URL: <https://www.britannica.com/science/nuclear-binding-energy>.
- [4] ESO. *A hard day's night ahead*. <https://www.eso.org/public/images/potw1239a/>. Accessed: 2025-04-28. 2025.
- [5] ESO. *Transparency of the atmosphere*. https://www.eso.org/public/images/atm_opacity/. Accessed: 2025-04-28. 2025.
- [6] Niall Deacon IAU OAE SDSS. *Spectrum of an F-type star*. Accessed: 2025-03-30. 2025. URL: <https://www.astro4edu.org/resources/diagram/zY580V14PE47/>.
- [7] Matthew Newby. *Galaxy Rotation Curve*. Published May 4, 2019. Image illustrating the rotation curve problem in galaxies, created by the author. 2019. URL: <https://sites.temple.edu/profnwby/2019/05/04/galaxy-rotation-curve/>.
- [8] OGLE Project. *OGLE: Optical Gravitational Lensing Experiment*. <https://ogle.astrouw.edu.pl>. Accessed: March 2025.
- [9] RjHall. *Nuclear Energy Generation*. Accessed: March 30, 2025. 2008. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Nuclear_energy_generation.svg.
- [10] W. M. Keck Observatory. *Photos*. <https://keckobservatory.org/media/photos/>. Accessed: 2025-04-28. 2025.
- [11] Д.Ильин. *Heat Transfer in Stars*. Accessed: 2025-03-30. 2021. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Heat_Transfer_in_Stars.svg.