(Korrigerat) Finalprov Astronomiolympiaden 2023 (med lösningsförslag)

Astronomisk Ungdoms Astronomiolympiadgrupp

4 April 2023
kl 11:00 till 14:00

Detta är finalprovet för den svenska Astronomiolympiaden 2023. De 5 personer med högst poäng (korta uppgifter ger 4 poäng, långa uppgifter ger 10 poäng) kommer erbjudas plats i det svenska laget i *International Olympiad on Astronomy & Astrophysics (IOAA)* i Polen, i augusti.

Lycka till!

Namn	

Provet börjar på nästa sida. Vänd ej på provet förrän klockan slår 11:00. Sluta skriva omedelbart när klockan slår 14:00.

Tillåtna verktyg:
Skrivdon, kladdpapper, grafritande (**ej symbolhanterande**) miniräknare, **ingen egen formelsamling** (förutom sista sidan av provbladet). **Svara på varje fråga på separata papper, och se till att numrera alla sidor du lämnar in.**

Jag har svarat på följande frågor (kryssa i):

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

I originalprovet fanns 2 huvudsakliga fel: Värdet på c var 1000 gånger för lågt, och värdet på Stefan-Boltzmanns konstant σ var 10 gånger för lågt. Att ljushastigheten var felspecificerad så fel bör inte anses ursäkta felberäkningar, då den anses så välkänd, men att σ var felspecificerad med en så rimlig mängd betyder att vi inte drar av poäng för uträkningar som använder det felaktiga värdet. Det fanns även en mängd mindre fel och otydliga formuleringar. Jordens axellutning var i det utgivna provet specificerat som 23,55°, när det verkliga värdet är 23,4°, men detta påverkar ej korrekt gjorde uträkningar avsevärt nog för att ens komma utanför det tillåtna värdet på svaret. Kepler-186s nyligast bestämda apparenta magnitud är 15,3mag, inte 12,5mag som skrivet i provet, var det felet kom från kan bara gud (eller en Hugo under sömnbrist) förklara, men vi noterar att det inte har någon åverkan på annat än verklighetstrogenhet.

I detta prov med lösningarförslag är alla kända fel korrigerade och korrekta konstantvärden används. Det finns i vissa fall helt giltiga alternativlösningar, vilka inte behandlas ytterligare.

Korta frågor (4 poäng per uppgift)

Uppgift 1

Hur lång tid tar en soluppgång på Nordpolen om soluppgången definieras från när någon del av solen blir synlig över horisonten tills hela solen är synlig? Försumma atmosfärens brytning. Jordens axellutning är 23,4°.

Lösning

En soluppgång på nordpolen sker en gång per år, och sker kring vårdagsjämningen. Vi betänker vinkeln mellan horisonten på nordpolen och solen. Denna (riktade) vinkel är, med antagande om cirkulära omloppsbanor och tack vare försummande av atmosfärens brytning (som överstiger solens vinkelradie med en faktor 1,6 när det kommer till sol(upp/ned)gång),

$$\theta_\oplus = \sin(\frac{t}{1\text{år}})\varepsilon$$

där ε är standardsymbolen för jordens oblikvitet, dvs axellutning. Tiden t mäter vi sådant att $t = 0$ är vid vårdagsjämningen (vilket är ett ögonblick, inte en dag). Vi söker nu tidpunkterna t_1, t_2 så att

$$\theta_\oplus = \theta_\odot\text{, solen är under horisonten och rör den, } \theta_\oplus = -\theta_\odot\text{, solen är över horisonten och rör den.}$$

Sinus är en udda funktion, och det vi räknar ut vinkelradien av solen.

$$\theta_\odot = \frac{R_\odot}{1\text{AU}} \approx 4{,}65\text{mrad} \approx 0{,}2665°$$

och tiderna t_1, t_2 ges av

$$t = \pm 1\text{år}\arcsin(\frac{\theta_\odot}{\varepsilon}) \approx \pm 358600\text{s}$$

så soluppgången tar $t_2 - t_1 \approx 717200\text{s} \approx 8{,}3\text{dagar}$.

Uppgift 2

Polonium-210 kan alfasönderfalla till bly-206, antingen direkt eller genom en exciterad bly-atomkärna (se sönderfallsschema nedan). Beräkna gammafotonens energi. Relevanta nuklidmassor är $m(^{210}_{84}\text{Po}) = 209.982\,873\,6\,\text{u}$, $m(^{206}_{82}\text{Pb}) = 205.974\,465\,3\,\text{u}$, och $m(^{4}_{2}\text{He}) = 4.002\,603\,25\,\text{u}$.

Lösning

Från sönderfallschemat finns det ett enkelt tillvägagångssätt: Gammafotonen har all energi från massenergiskillnaden mellan polonium-210 och bly-206 förutom det som avgår i alfakärnans massa och alfakärnans rörelseenergi.

Vi kommer ihåg en viss känd ekvation

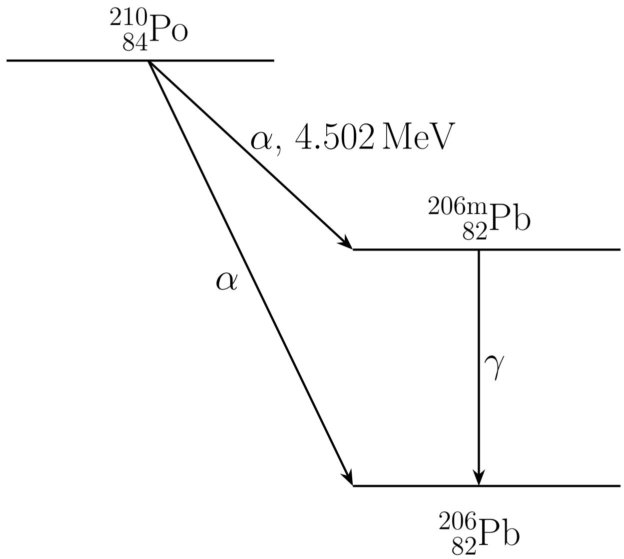
$$E = mc^2$$

och får

$$E(\gamma) = c^2\left(m(^{210}_{84}\text{Po}) - (m(^{206}_{82}\text{Pb}) + m(^{4}_{2}\text{He}))\right) - 4{,}502\text{MeV} \approx 905{,}4\text{keV}.$$

Uppgift 3

Venus hastighet mäts med 12,5cm våglängd radiovågor, av en astronaut vid 1AU från solen (stationär, ej i omloppsbana), när Venus-Solen-Astronaut bildar en rät vinkel. Returvågen från radarns utsända ljus har våglängden 12,4988cm. Räkna ut Venus omloppshastighet från detta.



Lösning

Det första att göra i detta problemet är att rita upp ett schematiskt diagram över astronauten, solen, och venus omloppsbana. Dopplerskiftet i radarreturen kommer från den del av Venus omloppshastighetsvektor som är riktad rätt mot astronauten (dvs storleken av projiceringen). Efter lite enkel trigonometri eller förståelse av skalärprodukten ser vi att astronauten mäter hastigheten

$$v_m = v_♀ \cos\theta$$

där θ är vinkeln solen-astronaut-venus. Vi kommer ihåg en definition av cosinus, och får genom snabb applikation av pythagoras sats att

$$\cos\theta = \frac{1\text{AU}}{\sqrt{(1\text{AU})^2 + R_♀^2}} \approx 0{,}810$$

där $R_♀$ är Venus omloppsradie.

Vi har också genom dopplereffekten att

$$v_m = \left(1 - \frac{12{,}4988\text{cm}}{12{,}5\text{cm}}\right) c \approx 28{,}8\text{km}\,\text{s}^{-1}$$

så vi löser ut

$$v_♀ = \frac{v_m}{\cos\theta} \approx 36\text{km}\,\text{s}^{-1}$$

vilket är nära det verkliga värdet på kring $35\text{km}\,\text{s}^{-1}$.

Uppgift 4

Anta att en typ 1a-supernova med absolut magnitud $M = -19{,}5$mag skulle uppstå på avståndet 9kpc och att extinktionen orsakad av interstellära mediet är $0{,}9\text{mag}\,\text{kpc}^{-1}$ mellan oss och detta objekt. Beräkna vilken apparent magnitud supernovan skulle få.

Lösning

Vi använder magnitudformeln samt extinktionskorrektion för att få ut den apparenta magnituden. Apparent magnitud skrivs m, avstånd skrivs (i parsec) d och extinktion skrivs A.

$$m = M + Ad + 5\log\frac{d}{10} \approx 3{,}37\text{mag}.$$

Notera att detta är en helt synlig magnitud även vid ganska dåliga förhållanden (ögat kan se ner till cirka 6mag).

Uppgift 5

I magnethuset finns ett reflektorteleskop med spegeldiameter med 10 tums diameter spegel, F-tal f/10, och brännvidd 2500mm. Bestäm om en människa kan urskilja Jupiters röda fläck (vilken har diameter 2,6$D_{\oplus}$)med det teleskopet, när den använder ett okular med 25mm brännvidd. Bortse från atmosfäriska störningar, och anta att Jupiter och Jorden ligger som närmast.

Lösning

Vi bortser helt från f-talet hos teleskopet, Jupiter är ljusstark nog att alla teleskop med ljusinsamlingsförmåga större än ett ihåligt halmstrå kan se den. Det återstår då 2 potentiella anledningar till att inte kunna se den röda fläcken: Antingen är förstoringen m inte nog för att göra fläckens vinkelstorlek θ_f synlig för mänskliga ögats vinkelupplösning $\theta_{\circledcirc}$ ($\theta_f m < \theta_{\circledcirc}$) eller så är fläckens vinkelstorlek mindre än teleskopets vinkelupplösning θ_t ($\theta_f < \theta_t$). Vi beräknar dem 4 relevanta variablerna:

$$\theta_f = \frac{D_f}{d_f}$$

där D_f är den röda fläckens diameter, och d_f är avståndet till Jupiter (vid dess närmsta passage). Alltså

$$\theta_f = \frac{D_f}{d_f} = \frac{2{,}6D_{\oplus}}{R_{\jupiter} - R_{\oplus}} \approx 5{,}27 \cdot 10^{-5}\text{rad}.$$

$$m = \frac{f_{primary}}{f_{secondary}} = 100.$$

$$\theta_t = 1{,}22\frac{\lambda}{D_t},$$

där vi använder Rayleigh-kriteriet och väljer en lämplig synlig våglängd som 500nm samt använder teleskopets spegeldiameter,

$$\theta_t = 1{,}22\frac{\lambda}{D_t} = 1{,}22\frac{500\text{nm}}{10 \cdot 2{,}54\text{cm}} \approx 2{,}4 \cdot 10^{-6}\text{rad}.$$

Ögats upplösning $\theta_{\circledcirc}$ är 30", vilket är cirka $1{,}454 \cdot 10^{-4}$radian, och vi kollar båda potentiella hindrena:

$$\theta_f m > 10^{-3} > \theta_{\circledcirc}$$

och

$$\theta_f > \theta_t$$

så den röda fläcken går att se med teleskopet.

Långa frågor (10 poäng per uppgift)

Uppgift 6

LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) uppmätte 2015 en gravitationsvåg från två oladdade och oroterande svarta hål som slog samman. Genom extremt noggranna mätningar vid skilda platser på jorden lyckades de mäta upp att de svarta hålen roterade 250 gånger per sekund kring varandra vid ögonblicket då deras händelsehorisonter möttes. Vad är massan hos det resulterande, större, svarta hålet som bildades i kollisionen? Försumma ev. energiförlust från gravitationsvågorna.

Lösning

Det finns några få klurigheter i denna fråga, sedan blir allt algebra. Då de svarta hålen är oladdade och oroterande (obs orealistiskt) kan vi direkt använda formeln för Schwarzschildradie $r = \frac{GM}{c^2}$ för att få radien på ett individuellt svart hål, och då vi vet rotationshastigheten vid tillfället då de svarta hålens händelsehorisonter rör varandra kan vi även få ut halvaxeln av deras ömloppsbanor". Låt $f = 250\text{Hz}$, r_1, r_2 vara radien (händelsehorisonten) för de två svarta hålen, m_1, m_2 vara deras massa, och då de rör varandra låter vi $a = \frac{R}{2} = \frac{r_1+r_2}{2}$ vara halva storaxeln och $M = m_1 + m_2$ den kombinerade massan (dvs massan av det resulterande svarta hålet). Vi använder Keplers tredje lag

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

och får

$$\frac{R^3 f^2}{8} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

och noterar att $R = \frac{GM}{c^2}$ alltså

$$\frac{(\frac{GM}{c^2})^3 f^2}{8} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

vilket efter lite algebra ger

$$M = \frac{c^3}{2\pi G f} \approx 129{,}3 M_\odot$$

vilket är vårt slutgiltiga svar.

Uppgift 7

En katt vid namn Schrödinger på norra halvklotet märkte att längden på den kortaste skuggan från en $1.000m$ lång vertikal pinne under en viss dag var $l_{min} = 1.732m$, och att samma pinne på samma dag hade en maximal skugglängd på $5.671m$. Bestäm latituden Schrödinger befinner sig på, samt solens deklination på den dagen. Solen kan modelleras som en punktkälla och du kan försumma atmosfäriska effekter.

Lösning

Det första som måste inses är att eftersom skuggan har en ändlig maximal längd går solen inte ned, varför Schrödinger måste befinna sig innanför en polcirkel (solen är *cirkumpolär*). Detta innebär också att det kortaste skuggan uppstår då solen är vid sin högsta punkt, d.v.s. vid övre kulmination, och den längsta skuggan uppstår vid solens lägsta punkt, d.v.s lägsta kulmination. Vinkeln i trianglen som bildas av skuggan och pinnen ges som

$$\tan\theta = \frac{h}{l},$$

där h är höjden av pinnen och l är skuggans längd. Vi kan därmed beräkna den maximala och minimala vinkeln, vilka kommer motsvara solens *altitud* vid övre respektive undre kulmination:

$$\theta_{\max} = \arctan\frac{1.000}{1.732} = 30^\circ,$$
$$\theta_{\min} = \arctan\frac{1.000}{5.671} = 10^\circ.$$

Enligt formlerna för övre och undre kulmination har vi (där δ är solens deklination och ϕ är latituden) att altituderna vid kulminationerna ges som

$$\begin{aligned}\theta_{\text{max}} &= 90° - \phi + \delta,\\ \theta_{\text{min}} &= \phi - 90° + \delta.\end{aligned}$$

Ekvationen för θ_{max} ger att

$$\delta = \theta_{\text{max}} - 90° + \phi,$$

varefter insättning i uttrycket för θ_{min} ger

$$\begin{aligned}\theta_{\text{min}} &= \phi - 90° + \theta_{\text{max}} - 90° + \phi\\ &= 2\phi + \theta_{\text{max}} - 180°\\ \iff \theta_{\text{min}} &- \theta_{\text{max}} + 180° = 2\phi\\ \iff \phi &= \frac{\theta_{\text{min}} - \theta_{\text{max}} + 180°}{2} = 80°.\end{aligned}$$

Därmed har vi även att

$$\delta = \theta_{\text{max}} - 90° + \phi = 20°.$$

Vi finner således att latituden är 80° och solens deklination är 20°.

Uppgift 8

Rymdteleskopet Kepler (senare K2), har sedan 2009 letat efter exoplaneter genom transitmetoden. Kring stjärnan Kepler-186 (KIC8120608) upptäckte Kepler-teleskopet 5 planeter, varav den yttersta, Kepler-186f, är av särskilt intresse.

(a)

Kepler-186 har apparent magnitud 12,5mag, parallax 5,60mas, och spektrummaximum vid 771,7nm. Bestäm stjärnans avstånd, radie, och luminositet.

0.0.1 Lösning (a)

För att bestämma stjärnans avstånd krävs endast parallaxekvationen, men för radie och luminositet krävs ett visst trick. Vi kommer ihåg (och detta är antagligen inte alltför vanligt bland kandidater att kunna) att solens apparenta magnitud är $-26{,}74$mag, samt att solens avstånd till observatören (jorden) ju är en astronomisk enhet. Vi räknar då ut solens absoluta magnitud, jämför med den beräknade absoluta magnituden av Kepler-186 (genom att vi känner till dess avstånd), och får därmed ut Kepler-186s luminositet i sol-luminositetsenheter. Därefter applicerar vi Wiens förskjutningslag för att få ut Kepler-186s effektiva temperatur, och får ut radien genom att likställa den beräknade luminositeten och den luminositet som stjärnan har vid en okänd radie men känd temperatur enligt Stefan-Boltzmann. Vi beräknar avståndet $d_\star$,

$$d_\star = \frac{1\text{pc}}{5{,}60\text{mas}} \approx 178{,}571\text{pc}.$$

Magnitudekvationen för solen för att få ut dess absoluta magnitud $M_\odot$ från dess apparenta magnitud $m_\odot$,

$$M_\odot = m_\odot - 5\log\frac{R_\oplus}{10\text{pc}} \approx 4{,}832\text{mag}.$$

Wiens förskjutningslag (obs det var fel i konstanten för Wiens förskjutningslag i det utgivna provet, men vi räknar med rätt konstant här) för att få ut den effektiva temperaturen för Kepler-186,

$$T_\star = \frac{2{,}898\text{mm K}}{771{,}7\text{nm}} \approx 3755\text{K}.$$

Nu noterar vi att förhållandet $\frac{L_\star}{L_\odot} = \left(\sqrt[5]{100}\right)^{M_\odot - M_\star}$ så vi söker $M_\star$ vilket enligt magnitudsekvationen är

$$M_\star = m_\star - 5 \log \frac{d_\star}{10\text{pc}} \approx 6{,}24095\text{mag}.$$

Nu kan vi alltså få ut

$$L_\star = L_\odot \left(\sqrt[5]{100}\right)^{M_\odot - M_\star} \approx 0{,}273162 L_\odot.$$

Vi har också det fördelaktiga sambandet via Stefan-Boltzmann att

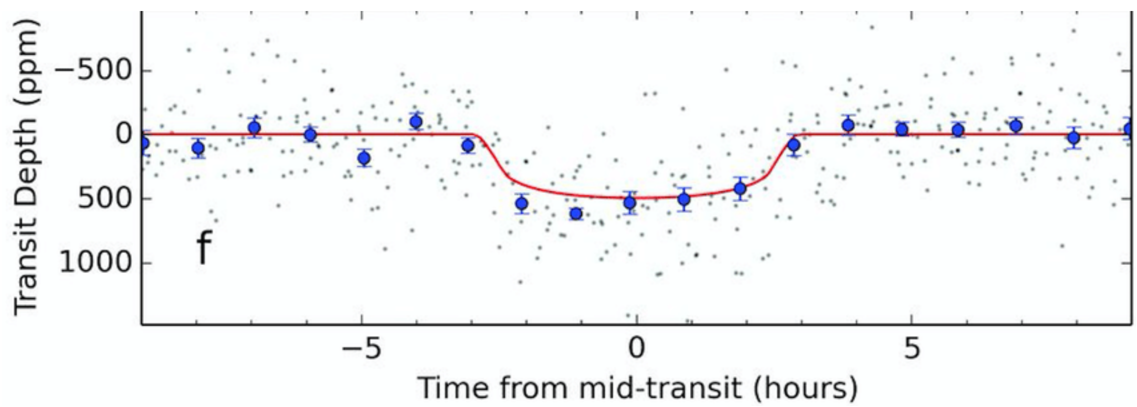
$$L_\star = 4\pi r_\star^2 \sigma T_\star^4,$$

och därmed

$$r_\star = \sqrt{\frac{L_\star}{4\pi\sigma T_\star^4}} \approx 8{,}61384 \cdot 10^8\text{m}.$$

(b)

Nedan finnes en s.k. "folded" ljuskurva från Kepler-186 med transits av Kepler-186f. Kepler-186f har en omloppsperiod på 129,9dagar och Kepler-186 har massa $0{,}47 M_\odot$. Bestäm Kepler-186f:s radie och omloppsradie.



Figur 1: En ljuskurva från Kepler-186 med vikta transits av Kepler-186f. Den röda linjen är best-fit från MCMC-simuleringar.

Lösning (b)

Vi får ut Kepler-186f:s omloppsradie (egentligen halva storaxeln, notera också att vi faktiskt antar inklination försvinnande nära 90° vilket stämmer för transitmetoden) genom att (nu massor, ej magnituder) $M_\star \gg M_\bullet$, och därmed reducerar Keplers tredje lag till

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_\star}{4\pi^2},$$

så

$$a = R_\bullet = \sqrt[3]{\frac{T^2 G M_\star}{4\pi^2}} \approx 5{,}84 \cdot 10^7\text{km} \approx 0{,}39\text{AU}.$$

För att beräkna planetradien behöver vi betrakta den vikta transitkurvan. När planeten under transit inträder över stjärnskivan kommer den observerade ljusstyrkan gå ned dramatiskt under tiden planeten inte helt är framför stjärnskivan, och sedan plana ut (men också gå ner över ett litet tag på grund av randfördunkling, att stjärnor ser mörkare ut nära randen och ljusare nära mitten). Vi mäter därför (och här godtas även mycket dåliga mätningar) tiden för det nästan linjära fallet i ljusstyrka i transitkurvan, och får ut $\Delta t = \frac{26px}{41px} \approx 2280$s som inträdestid (där $41px$ är antalet pixlar per timme). Vi känner till planetens omloppshastighet

$$v_\bullet = \sqrt{\frac{GM_\star}{R_\bullet}} \approx 32700\mathrm{m\,s^{-1}},$$

och får ut planetradien

$$r_\bullet = \frac{\Delta t \cdot v_\bullet}{2} \approx 37300\mathrm{km} \approx 5{,}9 r_\oplus.$$

(c)

Massan av Kepler-186f är svårestimerad, men vi antar att om det är en stenplanet har den en albedo på 0,3, och om det är en gasjätte har den en albedo på 0,6. Beräkna ekvilibriumtemperaturen av Kepler-186f, givet att den inte har en atmosfär.

Lösning (c)

Av termodynamiska anledningar spelar albedo inte roll för ekvilibriumtemperatur (betänk två solida sfärer av olika albedo i samma rum, om de uppnår olika temperatur så kan vi utföra termodynamiskt arbete out of nothing, därmed kan inte albedo påverka ekvilibriumtemperatur i en sådan här enkel modell. Detta framkommer också direkt av ekvationerna om man räknar med albedo, men vi kan helt enkelt skippa det). För att beräkna ekvilibriumtemperatur krävs 3 saker: Vi behöver den inkommande effekten från stjärnan Kepler-186 P_i, den utgående effekten genom svartkroppsstrålning från Kepler-186f P_o (som beror på dess ekvilibriumtemperatur $T_\bullet$) samt att dessa två effekter är lika varandra vid ekvilibrium.

Den inkommande effekten är helt enkelt Kepler-186s luminositet utspritt över hela sfären med radius $R_\bullet$ och infaller på en disk med radie $r_\bullet$. Alltså

$$P_i = \frac{\pi r_\bullet^2}{4\pi R_\bullet^2} L_\star.$$

Den utgående effekten är det som enligt Stefan-Boltzmann strålar ut från hela planetens yta (och allting är så här enkelt eftersom vi bortser från eventuella atmosfäriska effekter), så

$$P_o = 4\pi r_\bullet^2 \sigma T_\bullet^4.$$

Vi sätter de två effekterna lika varandra och får

$$4\pi r_\bullet^2 \sigma T_\bullet^4 = \frac{\pi r_\bullet^2}{4\pi R_\bullet^2} L_\star,$$

och efter lite algebra

$$T_\bullet = \sqrt[4]{\frac{L_\star}{16\pi\sigma R_\bullet^2}} \approx 323K = 49°\mathrm{C},$$

och vi får att planeten är i den beboeliga (det kan finnas flytande vatten!) zonen.

Uppgift 9

En rymdturist vid namn Beff Jezos vill besöka (och snurra minst ett varv i) dem två mest kända ekvatoriella omloppsbanorna, och undrar hur mycket bränsle hans rymdskepp behöver ha som minst. Mer specifikt vill Beff besöka LEO (400km över havet, som ISS) och GEO (35786km över havet), vilka båda är cirkulära banor. Om själva raketen Mr Jezos ska åka i väger 2 ton (inklusive Beff) utan bränsle, och hans raket skjuter ut gas i en hastighet på $10\mathrm{km\,s^{-1}}$, hur mycket bränsle behöver hans raket ha vid uppskjutning? Ignorera atmosfären och anta att Beff skjuts upp från havsnivå på ekvatorn i jordens rotationsriktning, i valfri riktning. Hans raket är en s.k. Single-Stage-to-Orbit, och släpper alltså inte loss några raketsteg under färd.

0.1 Lösning

Vi kommer att dela upp färden i en uppskjutning och ett antal Hohmann-transfers. Vi börjar med uppskjutningen. För denna gäller att vi börjar med en fart $2\pi r_\oplus/(24\,\mathrm{h})$, motsvarande jordens rotation vid jordytan. Vi kan se uppskjutningen som att vi lägger oss i en omloppsbana med radien $r_\oplus$. Detta ger kraftjämvikten

$$\begin{aligned}\frac{mv^2}{r_\oplus} &= G\frac{mM_\oplus}{r_\oplus^2}\\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_\oplus}}.\end{aligned}$$

Det faktiska delta-v som behövs är (p.g.a. jordens rotation)

$$\Delta v_{\text{Launch}} = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{r_\oplus}} - \frac{2\pi r_\oplus}{24\,\mathrm{h}} \approx 7441.4\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Resterande steg ges av Hohmann-transfer-ekvationen. Till LEO har vi (med $\mu = GM_\oplus$)

$$\Delta v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{r_\oplus}}\left(\frac{2r_{\text{LEO}}}{r_\oplus + r_{\text{LEO}}} - 1\right) + \sqrt{\frac{\mu}{r_{\text{LEO}}}}\left(1 - \frac{2r_\oplus}{r_\oplus + r_{\text{LEO}}}\right) \approx 473.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Från LEO till GEO har vi

$$\Delta v_3 = \sqrt{\frac{\mu}{r_{\text{LEO}}}}\left(\frac{2r_{\text{GEO}}}{r_{\text{LEO}} + r_{\text{GEO}}} - 1\right) + \sqrt{\frac{\mu}{r_{\text{GEO}}}}\left(1 - \frac{2r_{\text{LEO}}}{r_{\text{LEO}} + r_{\text{GEO}}}\right) \approx 7787.4\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Total delta-v är därmed

$$\Delta v_{\text{tot}} = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 = 15\,682\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Eftersom det är en Single-Stage-to-Orbit kan vi använda den ordinarie raketekvationen (i ett steg), vilken ger att

$$\Delta v = v_e \ln\frac{m_0}{m_f},$$

och då vi vet v_e och m_f (slutmassan) behöver vi endast finna m_0. Detta ges som

$$\begin{aligned}\Delta v &= v_e \ln\frac{m_0}{m_f}\\ \exp\left(\Delta v/v_e\right) &= \frac{m_0}{m_f}\\ m_0 &= m_f \exp\frac{\Delta v}{v_e}.\end{aligned}$$

Massan bränsle ges nu som

$$m_{\text{fuel}} = m_0 - m_f = m_f\left(\exp\frac{\Delta v}{v_e} - 1\right) \approx 7600\,\mathrm{kg}.$$

Således behövs ungefär 7.6 ton bränsle.

Notation

Standardsymbolerna för himlakropparna (i ordning från solen) är ☉, ☿, ♀, ⊕, ♂, ♃, ♄, ⛢, ♆, och ♇ för Pluto.

Givna solsystemsdata, värden, och formler

Himlakropp	Diameter vid ekvator (km)	Avstånd från solen (10^6km)	Massa (10^{21}kg)	Luminositet (W)
Solen	$6{,}955 \cdot 10^5$	—	$1{,}989 \cdot 10^9$	$3{,}827 \cdot 10^{26}$
Merkurius	4879,4	57,9	330,1	—
Venus	12104	108,2	4868	—
Jorden	12756	149,597870	5972	—
Mars	6779	227,9	641,7	—
Jupiter	142800	778,3	$1{,}898 \cdot 10^6$	—
Saturnus	120660	1427,0	$5{,}681 \cdot 10^5$	—
Uranus	51118	2871,0	$8{,}681 \cdot 10^4$	—
Neptunus	49528	4497,1	$1{,}024 \cdot 10^5$	—

Tabell 1: Grundläggande data om solsystemet.

Namn	Värde	Enhet
Tum	2,54	cm
Newtons gravitationskonstant	$6{,}67408 \cdot 10^{-11}$	$\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$
Hubbles konstant	68	$\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$
Solarkonstanten	1360	$\mathrm{W\,m^{-2}}$
Plancks konstant	$6{,}626 \cdot 10^{-34}$	J s
Ljusets hastighet i vakuum	299,792458	$\mathrm{Mm\,s^{-1}}$
Ljusår	$9{,}461 \cdot 10^{12}$	km
Parsec (pc)	3,262	ljusår
Dalton (Da, u, amu)	$1{,}661 \cdot 10^{-27}$	kg
Dalton (Da, u, amu)	931,4941	$\mathrm{MeV}\,c^{-2}$
Boltzmanns konstant	$1{,}381 \cdot 10^{-23}$	$\mathrm{m^2\,kg\,s^{-2}\,K^{-1}}$
Stefan-Boltzmanns konstant	$5{,}6704 \cdot 10^{-8}$	$\mathrm{W\,m^{-2}\,K^{-4}}$
Atmosfäriskt tryck vid havsnivå (på jorden)	101,3	kPa
Jordens rörelsemängdsmoment	$8{,}038 \cdot 10^{37}$	$\mathrm{kg\,m^2}$
Siderisk dag	23,9344696	h
Julianskt år	365,25	dagar (24h)
Nuklidmassa $^{210}_{84}\mathrm{Po}$	209,9828736	u
Nuklidmassa $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$	205,9744653	u
Nuklidmassa $^{4}_{2}\mathrm{He}$	4,00260325	u
Mänskliga ögats vinkelupplösning	30	as

Tabell 2: Fysikaliska värden

Namn	Formel
Newtons gravitationslag	$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$
Centripetalacceleration	$a = \frac{v^2}{r}$
Fotonens rörelsemängd	$p = \frac{E}{c}$
Fotonens energi	$E = hf$
Stefan-Boltzmanns lag	$\frac{P}{A} = \sigma T^4$
Wiens lag	$\lambda_{max} T = 2{,}898\text{mm}\,\text{K}$
Keplers tredje lag	$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1+m_2)}{4\pi^2}$
Pascals lag	$p_{tot} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$
Ideala gaslagen	$pV = \frac{m}{M} k_B T$
Δv_1 för Hohmann transfer	$\sqrt{\frac{\mu}{r_1}}\left(\frac{2r_2}{r_1+r_2} - 1\right)$
Δv_2 för Hohmann transfer	$\sqrt{\frac{\mu}{r_2}}\left(1 - \frac{2r_1}{r_1+r_2}\right)$
Δv_{tot} för Hohmann transfer	$\Delta v_1 + \Delta v_2$
Vis-viva ekvationen	$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$
Magnitudekvationen	$m - M = 5\log(\frac{d}{10})$
Parallaxekvationen	$d = \frac{1}{p}$
Rotationsenergi	$\frac{I\omega^2}{2}$ (I är rörelsemängdsmoment)
Tidsekvationen	$TE = TS - MS$

Tabell 3: Fysikaliska formler