

Finale of the Astronomy Olympiad 2025

The Swedish Astronomical Youth Association's Olympic Group

6 May 2025
9:00 to 13:00

This is the final exam for the Swedish Astronomy Olympiad 2025. The five students with the highest scores will be offered spots in the Swedish team to the *International Olympiad on Astronomy & Astrophysics (IOAA)* in India, in August.

Good luck!

Name | _____

The exam starts on the next page. Do not start the exam before 9:00. Stop writing immediately at 13:00.

The exam in total has 120 points.

Allowed tools:

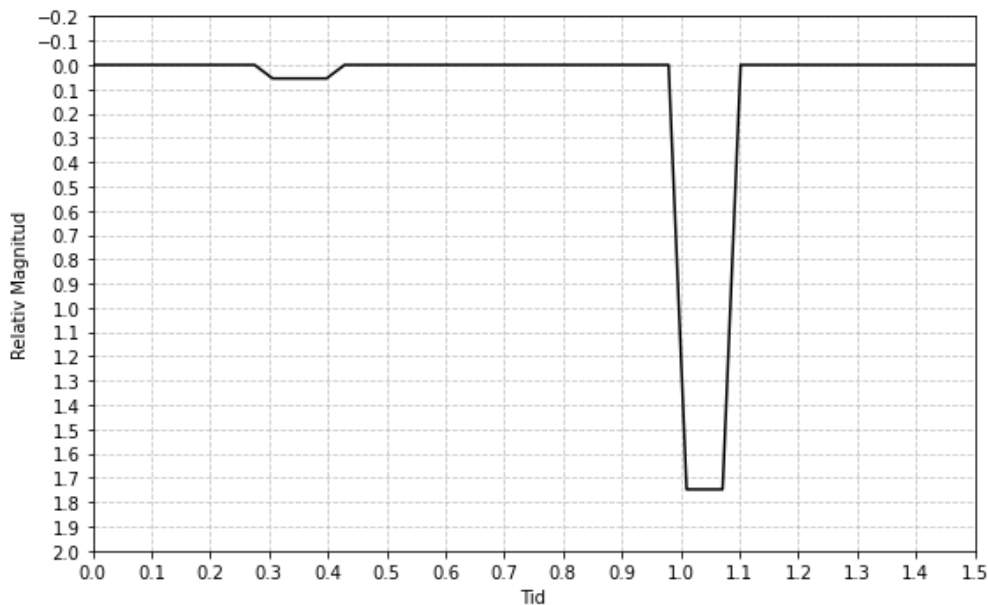
Writing tools, paper, **non symbolhandling** calculator, **no table of formulae** (except the last page of the test). **Answer every question in separate papers, and make sure to number all the pages you hand in.**

I have answered the following questions (mark):

1	2	3	4	5	6	7

1 Dubbeltrubbel (7p)

Ett dubbelstjärnesystems totala ljusstyrka varierar som i figur 1. Beräkna förhållandet mellan stjärnornas temperaturer och radier.



Figur 1: Ett dubbelstjärnesystems ljusstyrka.

Lösning

Stjärnorna måste ha olika storlek eftersom dipparna har ett flackt parti. Den stora stjärnan har radien, massan och temperaturen r_1, m_1, T_1 . Den lilla stjärnan har radien, massan och temperaturen r_2, m_2, T_2 . När den lilla stjärnan är framför den stora minskar totala ljusstyrkan med 0,05 magnituder vilket motsvarar att ljusstyrkan blir

$$10^{-0,4 \cdot 0,05} \approx 0,95$$

av den sammanlagda ljusstyrkan hos komponenterna.

När den lilla stjärnan är bakom den stora minskar totala ljusstyrkan med 1,75 magnituder vilket motsvarar att ljusstyrkan blir

$$10^{-0,4 \cdot 1,75} \approx 0,20$$

av den sammanlagda ljusstyrkan hos komponenterna. Detta är alltså ljusstyrkan hos den stora stjärnan relativt totala ljusstyrkan hos systemet. Detta innebär att den lilla stjärnans ljusstyrka är ungefär $1 - 0,20 = 0,80$ av systemets totala ljusstyrka. Den stora stjärnans ytljusstyrka i förhållande till den lillas är alltså $(1 - 0,95) / 0,80 = 1/16$

Stefan-Boltzmanns lag ger oss då att

$$T_1^4 / T_2^4 = 1/16$$

$$T_1 / T_2 = 1/2$$

Vi har med hjälp av Stefan Boltzmanns lag

$$\pi r_1^2 T_1^4 = 0,2(\pi r_1^2 T_1^4 + \pi r_2^2 T_2^4)$$

Vi sätter in

$$T_2 = 2T_1$$

i denna, vilket ger

$$r_1^2 T_1^4 = 0,2(r_1^2 T_1^4 + r_2^2 \cdot 16 T_1^4)$$

vilket ger

$$r_1/r_2 = 2$$

Svar: Förhållandet mellan radierna är 2,0 och förhållandet mellan temperaturerna är 0,50, där den största stjärnan har lägst temperatur.

2 Melvins alternativa universum (9p)

Melvin har fortsatt experimentera med sina egna (mjölkbaserade) universum. Han skapar ett sfäriskt universum innehållande endast materia med densiteten

$$\rho_M = \frac{4}{3} \rho_{cr}.$$

Hur mycket större kommer universumet att bli innan det börjar kontrahera igen?

Lösningsförslag:

Från definitionen finner vi att $\Omega_M = \frac{4}{3}$. Eftersom universumet är annars tomt finner vi från att densitetskverterna adderas till 1 att $\Omega_k = -\frac{1}{3}$. Vi skriver nu upp den första Friedmann-ekvationen enligt

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 (\Omega_M a^{-3} + \Omega_k a^{-2}) \\ \iff \dot{a} &= \pm H_0 \sqrt{\Omega_M a^{-1} + \Omega_k}. \end{aligned}$$

Då universum är som störst kommer a ha ett maximum, alltså kommer $\dot{a}$ att vara 0. Detta innebär att

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \pm H_0 \sqrt{\Omega_M a^{-1} + \Omega_k} = 0 \\ \iff \Omega_M a^{-1} + \Omega_k &= 0 \\ \iff a &= -\frac{\Omega_M}{\Omega_k} \\ \iff a &= 4. \end{aligned}$$

Alltså blir universumet 4 gånger större innan det börjar kontrahera igen.

3 Twilight Time in Gothenburg and ecliptic circle

It's April 10th in Gothenburg (latitude 57.7° N), and someone is planning a romantic hangout—not during sunset, but during **civil twilight** (don't worry, not the vampire kind). Civil twilight is defined as the period when the Sun is just below the horizon, specifically when its altitude ranges from 0° to -6° . Consider the beginning of the spring to be March 20th and $\epsilon = 23.44^\circ$.

- How long does civil twilight last on this date in Gothenburg?
- When the Sun's hour angle is 25° , what is the angle between the ecliptic and the horizon (Ψ), as shown in 2a? (Note: The **Vertical Angle Theorem** applies to the intersection of great circles as well (2b). LST is defined as $LST = H + \alpha$)

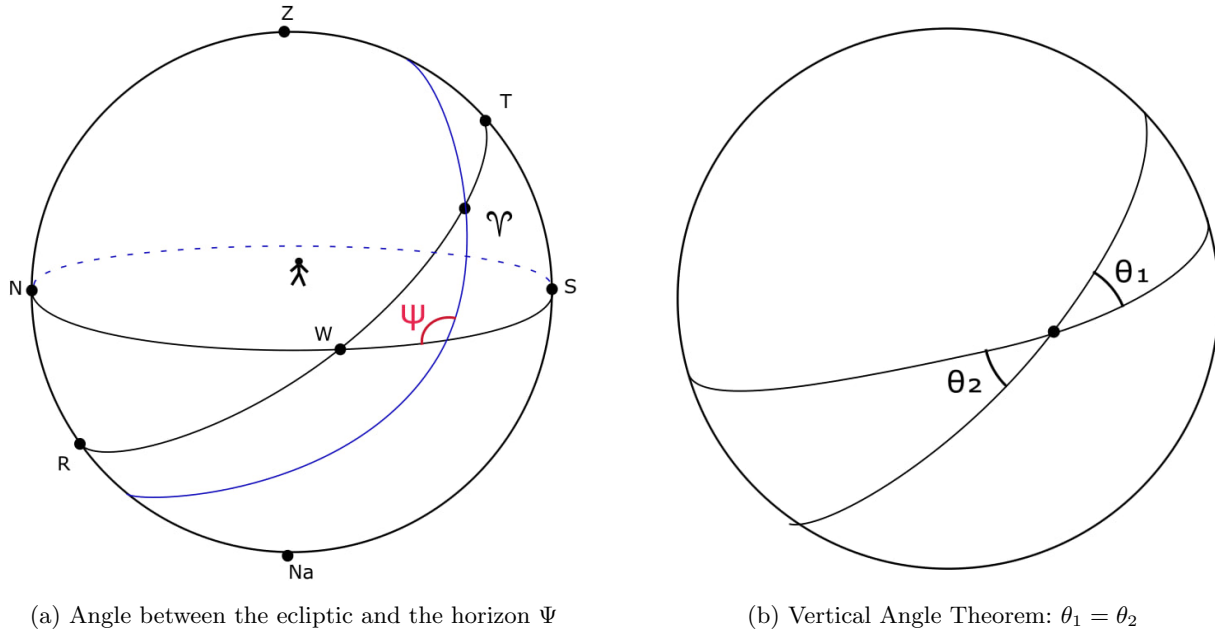


Figure 2

Spherical Triangle Formulas:

Cosine rules:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a\end{aligned}$$

Sine rule:

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

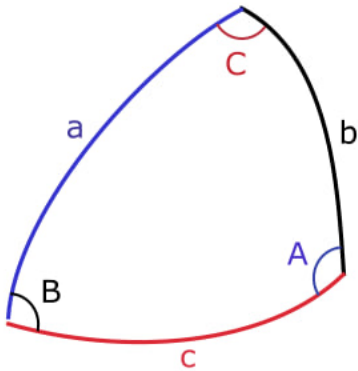


Figure 3: Spherical triangle with associated cosine and sine rules

Lösningsförslag:

3.1 a

April 10 $\Rightarrow N = 21$ days

$$\lambda(t) = \frac{360}{365.25} \times 21 = 20.7^\circ \pm 1.1^\circ$$

$$\sin(\delta_{sun}) = \sin(\epsilon) \sin(\lambda_{sun}) \Rightarrow \delta = 8.08^\circ \pm 0.5^\circ$$

Calculating H :

$$\cos(90 - a) = \cos(90 - \Phi) \cos(90 - \delta) + \sin(90 - \Phi) \sin(90 - \delta) \cos(H)$$

$$\sin(a) = \sin(\Phi) \sin(\delta) + \cos(\Phi) \cos(\delta) \cos(H)$$

$$\cos(H) = \frac{\sin(a) - \sin(\Phi) \sin(\delta)}{\cos(\Phi) \cos(\delta)}$$

$$a = -6^\circ \Rightarrow H_1 = 114.97^\circ \pm 1^\circ$$

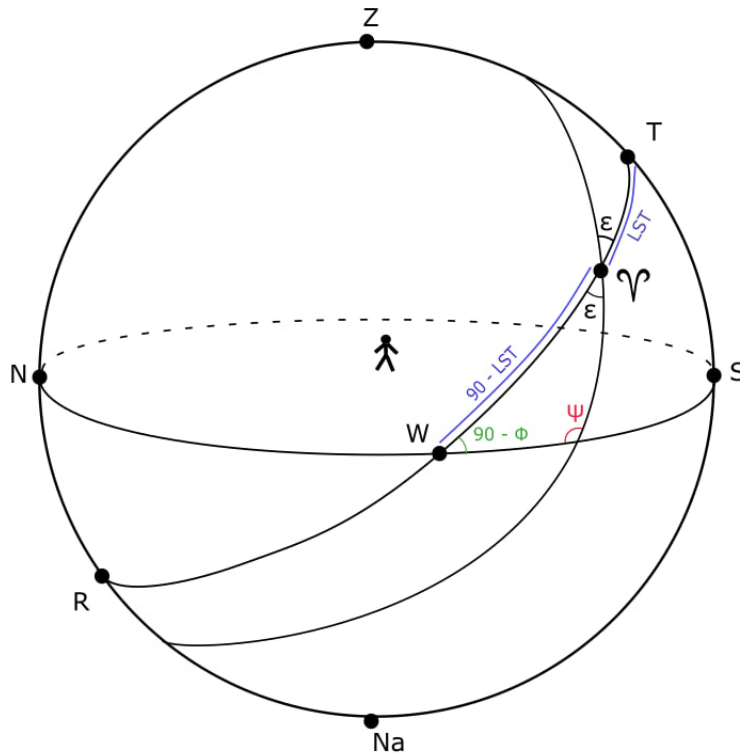
$$a = 0^\circ \Rightarrow H_2 = 102.97^\circ \pm 1^\circ$$

$$\Delta H = 12^\circ \pm 1.7^\circ = 0.8\text{h} \pm 0.13\text{h} = 48 \pm 8 \text{ min}$$

3.2 b

$$\sin(\alpha_{sun}) = \frac{\tan(\delta_{sun})}{\tan(\epsilon)} \Rightarrow \alpha = 19.11^\circ \pm 1.1^\circ$$

$$LST = \alpha + H = 19.11 + 25 = 44.11^\circ \pm 1.1^\circ$$



Figur 4: Sphere illustration

$$\cos(\Psi) = -\cos(90 - \Phi) \cos(\epsilon) + \sin(90 - \Phi) \sin(\epsilon) \cos(90 - LST)$$

$$\cos(\Psi) = -\sin(\Phi) \cos(\epsilon) + \cos(\Phi) \sin(\epsilon) \sin(LST)$$

$$\Psi = 128.87^\circ \pm 0.3^\circ$$

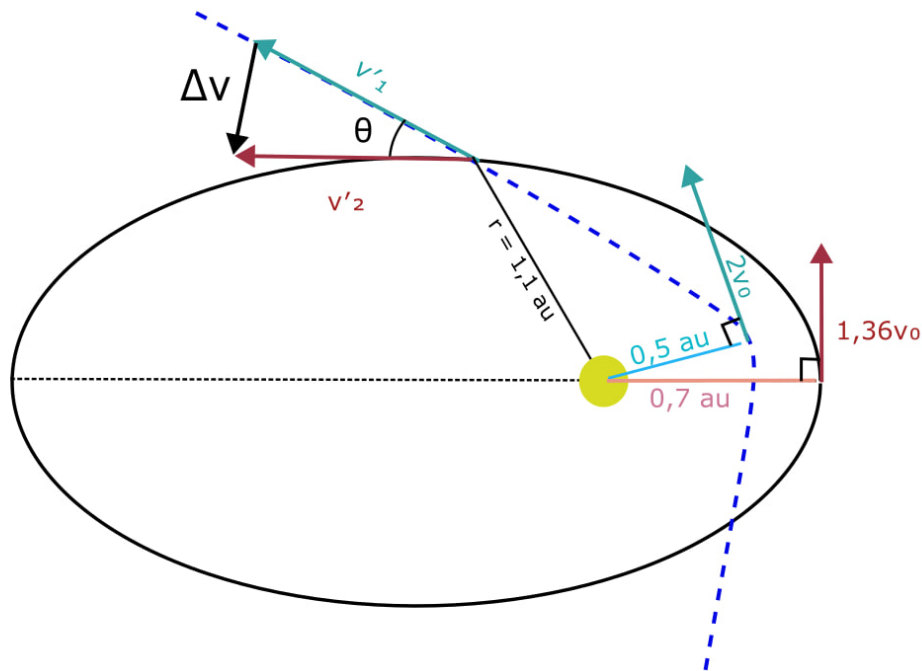
4 Interstellar Maneuver Challenge

One of our deep-space probes has astonishingly reached another solar system, home to a single planet orbiting its star in an **elliptical** path. Interestingly, the star has the **same mass as our Sun**, and the planet's **perihelion distance is 0.7 AU**. At that point, the planet has the orbital speed of $1.36 v_0$ where v_0 is Earth's orbital speed ($v_0 = \sqrt{GM_{sun}/1 \text{ AU}}$). Signs of habitability are promising.

Our spacecraft is currently on a **parabolic trajectory**, approaching the star with a closest distance of 0.5 AU, and at that perihelion it has a speed of $2v_0$. The two orbits (the planet's and the probe's) **intersect at $r = 1.1 \text{ AU}$** from the star, as shown in the diagram below.

To intercept the planet, the spacecraft must perform a velocity change ΔV at the intersection point to match the planet's velocity and enter its orbit. **(It would be easier to keep all the calculations in terms of v_0 and 1 au)**

- Calculate the angle between velocities of the space probe and the planet (θ) at the intersection point (1.1 AU).
- Calculate the velocity change ΔV .
- If the spacecraft has a mass of 1000 kg and uses a propulsion system with an **exhaust velocity of 10000 m/s**, determine what **percentage of the total mass must be fuel** for this maneuver.



Figur 5

Lösningförslag:

4.1 a

we denote $a.u$ with a .

Initial momentum of the planet in its perihelion:

$$L_p/m = r \times v = 0.7a \times 1.36v_0 = 0.952 a v_0 = 4.26 \times 10^{15} \text{ m}^2/\text{s}$$

and for the space probe:

$$L_s/m = r \times v = 0.5a \times 2v_0 = a v_0 = 4.47 \times 10^{15} \text{ m}^2/\text{s}$$

Method 1: calculating the velocity of the planet at the intersection point, Energy conservation:

$$\frac{v_p^2}{2} - \frac{GM}{0.7a} = \frac{v_2'^2}{2} - \frac{GM}{1.1a} = -4.48 \times 10^8 \text{ J}$$

$$v_2' = 0.9 v_0 = 26.84 \times 10^3 \text{ m/s}$$

and the velocity of the space probe at the intersection:

$$v_1' = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = 1.35 v_0 = 40.2 \times 10^3 \text{ m/s}$$

Method 2: Finding a and e of the ellipse to be $a = 1 \text{ au}$ and $e = 0.3$ then use:

$$v_2' = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = 0.9 v_0$$

Momentum conservation for the planet:

$$0.952 a v_0 = 0.9v_0 \times 1.1a \sin(\theta_p)$$

$$\theta_p = 74.0^\circ$$

Momentum conservation for the space probe:

$$a v_0 = 1.35v_0 \times 1.1a \sin(\theta_p)$$

$$\theta_s = 42.3^\circ$$

$$\boxed{\Delta\theta = 31.7^\circ \pm 1.5^\circ}$$

4.2 b

Cosine formula in a normal triangle:

$$(\Delta V)^2 = v_1'^2 + v_2'^2 - 2v_1'v_2' \cos(\Delta\theta)$$

$$\Delta v = 0.75v_0 = 22.36 \times 10^3 \text{ m/s}$$

4.3 c

$$\Delta v = v_{ex} \ln \frac{m_0}{m}$$

$$m_0/m = e^{\frac{\Delta v}{v_1'}} = e^{0.75v_0/4500} = 144.3$$

$$m/m_0 = 1/144 = 6.93 \times 10^{-3} = 0.007$$

$$\boxed{m_{fuel}/m = 1 - 6.93 \times 10^{-3} = 99.33\%}$$

5 Research

In a recent observation made by the **James Webb Space Telescope (JWST)**, the massive galaxy cluster **Abell 2744** was found to produce strong gravitational lensing of a background galaxy. Two lensed images of the same background source were detected on either side of the lens with the angular distance of $\theta_+ = 13$ arcsec and $\theta_- = -7$ arcsec.

In this context:

- θ is the observed angular position of a lensed image.
- β is the angular position the source would have in the absence of lensing.
- α is the bending angle of light due to gravity

$$\alpha = \frac{4GM}{bc^2}$$

b is shown in the picture.

- d_L is the distance from the observer to the lens (Abell 2744), given as $1.2 \cdot 10^9$ parsecs.
- d_S is the distance from the observer to the background source galaxy, given as $2.5 \cdot 10^9$ parsecs.
- d_{LS} is the distance between the lens and the source, given as $1.3 \cdot 10^9$ parsecs.
- **Use the following approximation for small angles**

$$\sin(\theta) \approx \tan(\theta) \approx \theta$$

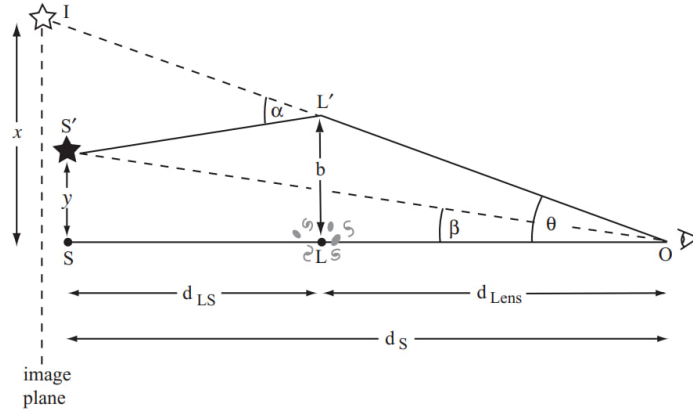


Figure 6: Refer to this figure for the lensing geometry

(a) Prove that

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}, \quad \text{where } \theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{d_{LS}}{d_L d_S}}$$

(b) Starting from the lens equation above, derive the formula for the angular positions of the lensed images:

$$\theta_{\pm} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2}$$

(c) Using the JWST data calculate the mass M of the lensing galaxy cluster (Abell 2744). Assume the lens can be modeled as a point mass.

Lösningförslag:

5.1 a

$$\beta \approx y/d_S \Rightarrow y = d_S \beta$$

$$\theta \approx x/d_S \Rightarrow x = \theta d_S$$

$$\alpha = (x - y)/d_{LS} \Rightarrow x - y = \alpha d_{LS}$$

Therefore

$$x - y = x - y$$

$$\alpha d_{LS} = \theta d_S - d_S \beta$$

We don't want α so

$$\alpha = \frac{4GM}{bc^2}$$

we should substitute b :

$$\theta = \frac{b}{d_{Lens}} \Rightarrow b = \theta d_{Lens}$$

$$\alpha = \frac{4GM}{bc^2} = \frac{4GM}{\theta d_{Lens} c^2}$$

We had:

$$\alpha d_{LS} = \theta d_S - d_S \beta \Rightarrow \frac{4GM}{\theta d_{Lens} c^2} d_{LS} = \theta d_S - d_S \beta$$

$$\frac{4GM}{\theta c^2} \frac{d_{LS}}{d_S d_L} = \theta - \beta$$

$$\frac{\theta_E^2}{\theta} = \theta - \beta$$

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

5.2 b

$$\beta = \theta - \frac{\theta_E^2}{\theta}$$

$$\beta \theta = \theta^2 - \theta_E^2$$

$$\theta^2 - \beta \theta - \theta_E^2 = 0$$

Solving a quadratic equation:

$$\theta_{\pm} = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\theta_E^2}}{2}$$

5.3 c

$$\beta = \theta_+ + \theta_- = (13 + (-7)) = 6 \text{ arcsec}$$

$$(\theta_+ - \theta_-)^2 = \beta^2 + 4\theta_E^2$$

$$\theta_E = 9.54 \text{ arcsec} = 4.62 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\theta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \cdot \frac{d_{LS}}{d_L d_S}}$$

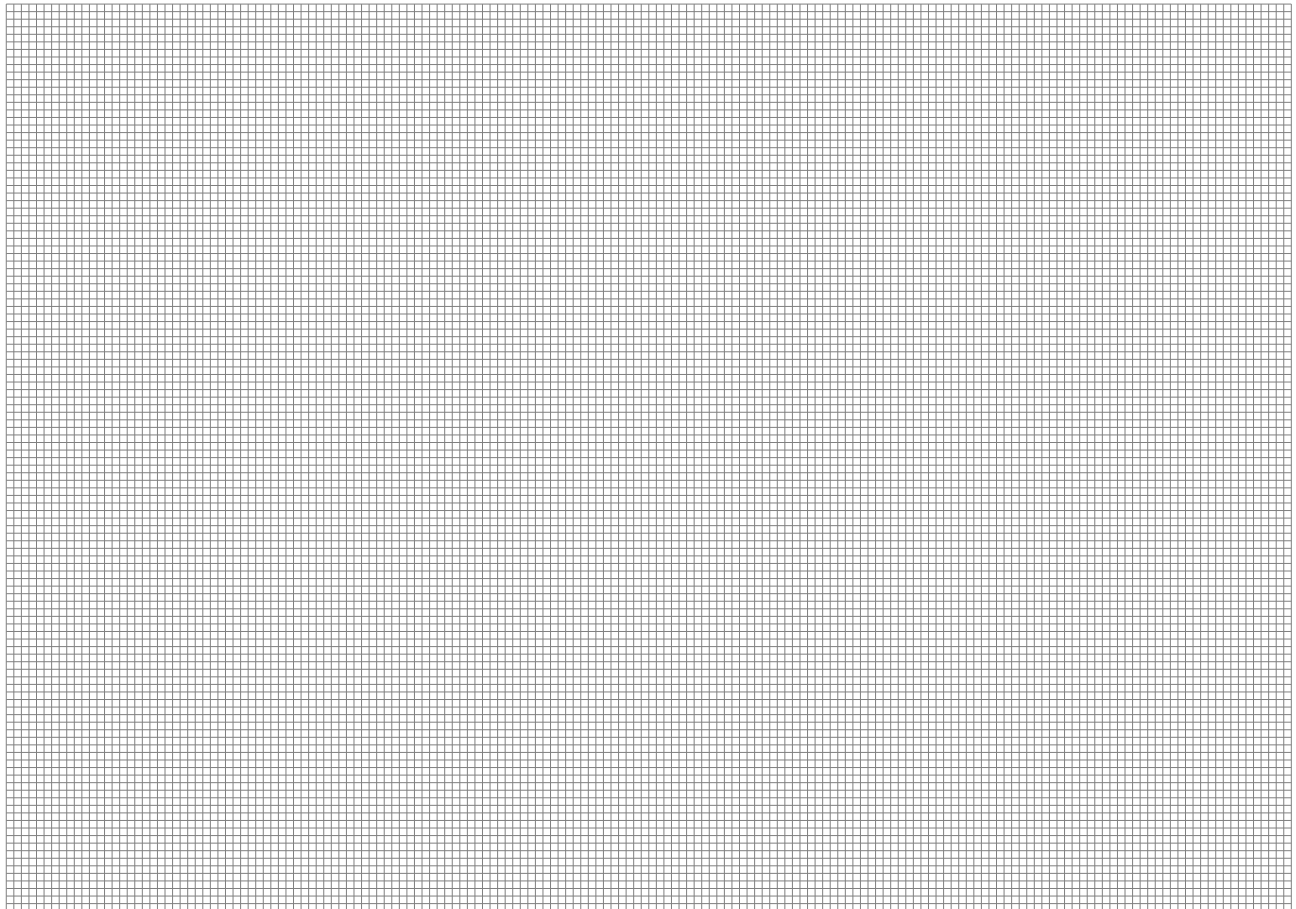
$$M = \frac{\theta_E^2 c^2 d_L d_S}{4G d_{LS}} = 4.44 \cdot 10^{13} \text{ kg} = 2.22 \cdot 10^{13} M_{sun}$$

6 Hubbelbubbeltrubbel (16p)

Datan i tabellen är olika avstånd till observerade stjärnor i Mpc och medföljande rödförskjutning. Använd denna för att med statistiska metoder svara på följande frågor.

- a) Bestäm ett 95% konfidensintervall för Hubblekonstanten. **(9p)**
- b) Beräkna och rita ut felstaplar till datapunkterna på den skattade linien på millimeterpappersrutan nedan, redovisa alla intervall på separat papper. **(7p)**

Avstånd (Mpc)	10,37	13,79	17,04	21,26	28,02
Rödförskjutning (z)	$2,39 \cdot 10^{-4}$	$3,23 \cdot 10^{-4}$	$4,02 \cdot 10^{-4}$	$4,98 \cdot 10^{-4}$	$6,63 \cdot 10^{-4}$



7 Kosmisk Beyblade (26p)

Den 17 augusti 2017 detekterades för första gången en gravitationsvågssignal från två neutronstjärnor som smälte samman [1]. Detta, tillsammans med de efterföljande elektromagnetiska signalerna, hade viktiga konsekvenser för vår förståelse av neutronstjärnors struktur och grundämnens framställning i universum [3, 2]. I denna fråga skall vi förstå hur vissa egenskaper hos det binära neutronstjärnesystemet kan extraheras från gravitationsvågssignalerna.

Den mest exakt bestämda parametern från gravitationsvågssignaler är *chirp mass* $\mathcal{M} = (m_1 m_2)^{3/5} / (m_1 + m_2)^{1/5} = \mu^{3/5} (m_1 + m_2)^{2/5}$, där $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ är den reducerade massan för systemet.

Antag nu att två neutronstjärnor med massor m_1 och m_2 rör sig i cirkulära banor kring ett gemensamt masscentrum, med vinkelfrekvens ω .

- Bestäm den totala energin i systemet, uttryckt i $\mathcal{M}$ och ω . Antag att $G = 1$. **(9p)**
- Luminositeten av gravitationsvågor från systemet ges av

$$L = \frac{32}{5} (\mathcal{M} \omega)^{10/3}.$$

Bestäm hur $\mathcal{M}$ kan uttryckas i ω och $\dot{\omega}$. **(4p)**

- Givet att du vet det nuvarande värdet på ω , hur lång tid är det kvar innan neutronstjärnorna smälter samman? *Ledning: Vad är vinkelhastigheten när $r \rightarrow 0$?* **(7p)**
- Antag att det binära systemet rör sig mot eller från oss, vilket ger ett rödskifte z . Bestäm hur den observerade $\mathcal{M}_{\text{obs}}$ förhåller sig till $\mathcal{M}_{\text{true}}$, som är uppmätt i vila i förhållande till det binära systemet. **(6p)**

Lösningsförslag:

- Antag att stjärnorna rör sig kring ett gemensamt masscentrum, med avstånd r_1 respektive r_2 . Vi låter $r = r_1 + r_2$, och eftersom stjärnorna har samma vinkelfrekvens ω har vi att (kom ihåg att vi räknar med $G = 1$) **(2 poäng för att skriva/visa/rita ordentligt diagram för stjärnorna och deras banor, med separata radier.)**

$$m_2 \omega^2 r_2 = \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 \omega^2 r_1 \quad (1)$$

$$\iff m_1 r_1 = m_2 r_2$$

$$\iff (m_1 + m_2) r_1 = m_2 r$$

$$\iff r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r,$$

och därmed att **(1 poäng för förhållandet, kommer ifrån kraftbalans)**

$$r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r$$

Vi söker $E = T + V$. Med $M = m_1 + m_2$ är kan potentiella energin V skrivas som **(1 poäng)**

$$V = -\frac{m_1 m_2}{r} = -\frac{M \mu}{r},$$

och **(1 poäng för korrekt kinetiskt energiuppställning)**

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 (r_1 \omega)^2 + \frac{1}{2} m_2 (r_2 \omega)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \left(\frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{M^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (r \omega)^2 \mu. \end{aligned}$$

Därmed får vi att

$$E = T + V = \frac{1}{2}(r\omega)^2\mu - \frac{M\mu}{r} = \frac{1}{2r}\mu \left(r^3\omega^2 - \frac{1}{2}M \right). \quad (2)$$

Kraftbalansen i Ekv. (1) kan nu användas för att få

$$\frac{M}{r^2} = r\omega^2 \Rightarrow M = r^3\omega^2. \quad (3)$$

Insättning i (2) ger då **(insättning 1 poäng)**

$$E = -\frac{1}{2} \frac{M\mu}{r}.$$

Genom att lösa ut r ur (3) **(lösa ut r 1 poäng)** får vi att

$$E = -\frac{1}{2} M^{2/3} \omega^{2/3} \mu,$$

och vi noterar att **(sambandet 1 poäng)**

$$\mathcal{M}^{5/3} = \mu M^{2/3}.$$

Detta ger oss till slut svaret **(1 poäng för rätt svar)**

$$E = -\frac{1}{2} \mathcal{M} (\mathcal{M}\omega)^{2/3}.$$

2. Vi kan räkna med att den enda förändringen av systemets energi är på grund av emission av gravitationsvågor. Detta ger oss energibalansen **(1 poäng)**

$$-\frac{dE}{dt} = L,$$

vilket ger **(2 poäng, måste inse att endast omega förändras med tid, inte massan)**

$$\frac{1}{2} \mathcal{M}^{5/3} \frac{2}{3} \omega^{-1/3} \dot{\omega} = \frac{32}{5} (\mathcal{M}\omega)^{10/3}. \quad (4)$$

Från detta kan vi direkt lösa ut $\mathcal{M}$, vilket ger **(1 poäng för rätt svar)**

$$\mathcal{M} = \left(\frac{5}{96} \right)^{3/5} \dot{\omega}^{3/5} \omega^{-11/5}. \quad (5)$$

3. Vi löser ut $(\dot{\omega})$ **(1 poäng för att lösa ut)** ur (4), och får

$$\dot{\omega} = \frac{96}{5} \mathcal{M}^{5/3} \omega^{11/3}.$$

Eftersom både $\mathcal{M}$ och ω är positiva innebär detta att $\dot{\omega}$ också är positiv **(1 poäng motivera att omegaprick är positiv, samt ökande i omega)**. Detta innebär att med ökande t kommer $\dot{\omega}$ öka, och (3) ger att då $r \rightarrow 0$ så får vi $\omega \rightarrow \infty$ **(1 poäng för omega går mot oändligheten)**.

För att finna tiden till att neutronstjärnorna smälter samman så vill vi relatera tiden och vinkelhastigheten. Låt t_{merger} vara tiden då sammansmältningen sker, och t_0, ω_0 den nuvarande tiden respektive vinkelhastigheten. Vi skriver

$$\frac{1}{\omega^{11/3}} \frac{d\omega}{dt} = \frac{96}{5} \mathcal{M}^{5/3},$$

och integrerar från $t = t_0$ till $t = t_{\text{merger}}$. Detta ger

$$\int_{t_0}^{t_{\text{merger}}} \frac{1}{\omega^{11/3}} \frac{d\omega}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_{\text{merger}}} \frac{96}{5} \mathcal{M}^{5/3} dt,$$

var efter variablebyte (**2 poäng för valfri korrekt metod att integrera över tid per omgärd**) ger att

$$\int_{\omega_0}^{\infty} \omega^{-11/3} d\omega = \int_{t_0}^{t_{\text{merger}}} \frac{96}{5} \mathcal{M}^{5/3} dt = \frac{96}{5} \mathcal{M}^{5/3} (t_{\text{merger}} - t_0).$$

Med den sökta tidskillnaden $\tau_{\text{merger}} = t_{\text{merger}} - t_0$ får vi (**1 poäng för korrekt utförd integral**)

$$\frac{96}{5} \mathcal{M}^{5/3} \tau_{\text{merger}} = \left[-\frac{3}{8} \omega^{-8/3} \right]_{\omega_0}^{\infty} = \frac{3}{8} \omega_0^{-8/3},$$

vilket till slut ger svaret (**1 poäng för korrekt svar**)

$$\tau_{\text{merger}} = \frac{5}{256} \mathcal{M}^{5/3} \omega_0^{-8/3}.$$

4. En foton som utsänds från ett föremål med rödsfärg z kommer att ha en våglängd $\lambda_{\text{obs}} = (1+z)\lambda_0$ (**1 poäng för att korrekt skrivit ut rödsfärg**). Detta beror på tidsdilatation på grund av källans rörelse. Vi ser dock att vinkelhastigheten av fotonen rödsfärgas inverst, och därmed uppfyller att $\omega_{\text{obs}} = \frac{\omega_0}{1+z}$ för en foton (**1 poäng för valfri, något fysikalisk, motivering**), och detsamma gäller för tidsdilatationen av det binära systemets omloppsbana (som förmedlas genom gravitationsvågor).

För tidsderivatan gäller dock att (**2 poäng för korrekt här**)

$$\dot{\omega}_{\text{obs}} = \frac{d\omega_{\text{obs}}}{dt_{\text{obs}}} = \frac{1}{1+z} \frac{d\omega_0}{dt_{\text{obs}}} = \frac{1}{(1+z)^2} \frac{d\omega_0}{dt_0} = \dot{\omega}_0.$$

Med detta kan vi använda (5) och se att (**1 poäng för korrekt algebra, dvs korrekt svar**)

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{obs}} &= \left(\frac{5}{96} \right)^{3/5} \dot{\omega}_{\text{obs}}^{3/5} \omega_{\text{obs}}^{-11/5} = \left(\frac{5}{96} \right)^{3/5} (1+z)^{-6/5} \dot{\omega}_0 (1+z)^{11/5} \omega_0 \\ &= (1+z) \left(\frac{5}{96} \right)^{3/5} \dot{\omega}_{\text{obs}}^{3/5} \omega_{\text{obs}}^{-11/5} \\ &= (1+z) \mathcal{M}_{\text{true}}. \end{aligned}$$

Därmed har vi att

$$\mathcal{M}_{\text{obs}} = (1+z) \mathcal{M}_{\text{true}},$$

och vi är klara!

Notation

Standardsymbolerna för himlakropparna (i ordning från solen) är $\odot$, $\mercury$, $\venus$, $\oplus$, $\mars$, $\jupiter$, $\saturn$, $\uranus$, $\neptune$, och $\pluto$ för Pluto. För månen använder vi $\moon$.

Referenser

- [1] Benjamin P Abbott m.fl. “GW170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral”. I: *Physical review letters* 119.16 (2017), s. 161101.

- [2] BPea Abbott m. fl. “Properties of the binary neutron star merger GW170817”. I: *Physical Review X* 9.1 (2019), s. 011001.
- [3] R Chornock m. fl. “The electromagnetic counterpart of the binary neutron star merger LIGO/VIRGO GW170817. IV. Detection of near-infrared signatures of r-process nucleosynthesis with Gemini-south”. I: *The Astrophysical Journal Letters* 848.2 (2017), s. L19.

Given solar system data, values, and formulae

Body	Diameter (km)	Distance from the sun (10^6 km)	Mass (kg)
The sun	$1.393 \cdot 10^6$	—	$1.989 \cdot 10^{30}$
Mercury	4879.4	57.9	$3.301 \cdot 10^{23}$
Venus	12104	108.2	$4.868 \cdot 10^{24}$
Earth	12756	149.597870	$5.972 \cdot 10^{24}$
Mars	6779	227.9	$6.417 \cdot 10^{23}$
Jupiter	142800	778.3	$1.898 \cdot 10^{27}$
Saturn	120660	1427.0	$5.681 \cdot 10^{26}$
Uranus	51118	2871.0	$8.681 \cdot 10^{25}$
Neptune	49528	4497.1	$1.024 \cdot 10^{26}$

Tabell 1: Basic solar system data.

Name	Value	Unit
Newtons Gravitational constant (G)	$6.67408 \cdot 10^{-11}$	$\text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$
Hubbles constant (H_0)	70	$\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$
Solarconstant (G_{SC})	1360	W m^{-2}
The Suns luminosity ($L_\odot$)	$3.826 \cdot 10^{26}$	W
The Suns temperature ($T_\odot$)	5777	K
Absolute magnitude of the Sun	4.83	mag
Apparent magnitude of the Sun	−26.74	mag
Plancks constant (h)	$6.626 \cdot 10^{-34}$	J s
Speed of light in vacuum (c)	299792458	m s^{-1}
Lightyear (ly)	$9.461 \cdot 10^{12}$	km
Parsec (pc)	206265	Astronomical unit (AU)
Dalton (Da, u, amu)	$1.661 \cdot 10^{-27}$	kg
Dalton (Da, u, amu)	931.4941	$\text{MeV } c^{-2}$
Mass of proton	938.272088	$\text{MeV } c^{-2}$
Mass of neutron	939.565420	$\text{MeV } c^{-2}$
Mass of electron	0.510998950	$\text{MeV } c^{-2}$
Boltzmann's constant (k_B)	$1.381 \cdot 10^{-23}$	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{K}^{-1}$
Stefan-Boltzmann's constant (σ)	$\frac{\pi^2 k_B^4}{60 \hbar^3 c^2} = 5.6704 \cdot 10^{-8}$	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$
Atmospherical pressure at sea-level (on Earht)	101.3	kPa
Siderical day	23.9344696	h
Julian year	365.25	dagar (24h)
Angular resolution of human eye	60	as
Absolute magnitude of supernova 1a	−19.3	mag
Chandrasekhar limit	1.44	$M_\odot$
Dark energy density	$6 \cdot 10^{-10}$	Jm^{-3}

Tabell 2: Physical values.

Name	Formula
Newton's law of gravitation	$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$
Centripetal acceleration	$a = \frac{v^2}{r}$
Momentum of photons	$p = \frac{E}{c}$
Energy of photons	$E = hf$
Stefan-Boltzmann's law	$\frac{P}{A} = \sigma T^4$
Wien's law	$\lambda_{max} T = 2.898 \text{ mm K}$
Kepler's third law	$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1+m_2)}{4\pi^2}$
Pascal's law	$p_{tot} = p_0 + \rho gh$
Ideal gas law	$pV = \frac{m}{M} k_B T$
Vis-viva equation	$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$
Magnitude equation	$m - M = 5 \log\left(\frac{d}{10}\right) + A_\lambda$
Magnitude and flux	$m_1 - m_2 = -2.5 \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$
Parallax equation	$d = \frac{1}{p''} \text{ pc}$
Rotational energy	$\frac{I\omega^2}{2}$ (I is angular momentum)
Time equation	$TE = TS - MS$
Leavitt's law	$M = -2.78(\log(P) - 1) - 4.00$
Redshifting	$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{rest}} = \sqrt{\frac{1+v_r/c}{1-v_r/c}} - 1 \approx \frac{v_r}{c}$
Rayleigh's criterion	$\theta \approx 1.22 \frac{\lambda}{D}$
Focal ratio	$f/ = \frac{FL}{D}$
Light collection formula	$LGP = \left(\frac{D}{D_{eye}}\right)^2$
Einstein's mass-energy relation	$E = mc^2$
Scalar factor depending on z	$a(z) = \frac{1}{1+z}$
Critical density	$\rho_{cr}(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}$
Hubble's law	$H_0 r = v$
Schwarzschild radius	$R = \frac{2GM}{c^2}$

Tabell 3: Physical formulae.