

Kvalprov Astronomiolympiaden 2023 (med lösningsförslag)

Astronomisk Ungdoms Astronomiolympiadgrupp

31 Januari 2023

Tillåtna verktyg:

Skrivdon, kladdpapper, grafitande (ej **symbolhanterande**) miniräknare, **ingen egen formelsamling** (förutom sista sidan av provbladet).

Notation

Standardsymbolerna för himlakropparna (i ordning från solen) är $\odot$, $\mercury$, $\venus$, $\oplus$, $\mars$, $\jupiter$, $\saturnus$, $\uranus$, $\neptune$, och $\pluto$ för Pluto.

Uppgift 1

Vilken planet har störst vinkelstorlek sedd från en annan planet i solsystemet när planeterna är som närmast? Ange vilken planet du är på, vilken du observerar och beräkna hur stor den är (på himlen).

Lösning på uppgift 1

Problemet har 3 huvuddelar:

1. Givet avståndet D till ett objekt (sfär) med diameter d , var är vinkelstorleken θ som objektet syns som? En rätvinklig triangel med kateter d och D (och observatör vid änden av katetern med längd D) visar att $\frac{d}{D} = \tan \theta$, så $\arctan(\frac{d}{D}) = \theta$. För vårt ändamål är $D \gg d$, och Taylorexansionen av $\tan(x)$ kring 0 är x , så kring 0 är $\arctan(x) = x$.

2. Givet att vi kollar på planet P så är det alltid bäst att kolla på P från någon av dess grannplaneter (inåt och utåt mht solen).

3. Givet att vi kollar från planet A på B eller från planet B på A är det alltid bäst att kolla från den mindre planeten på den större (eftersom deras avstånd är detsamma oavsett riktning).

Alltså kvarstår bara att göra upp en tabell av planeternas radier samt avstånd till nästa planet (förslagsvis i ordningen från Merkurius och utåt), och att räkna ut $\frac{d}{D}$ (notera $d = 2r$) för alla relevanta par (det finns fler tricks för att eliminera planetpar, t.ex. att inte kolla några par där $D > 10d$, mätt i gigameter respektive megameter).

När vi gjort detta får vi ut att (största) $\theta = 0,306 \cdot 10^{-3}$ är att kolla på jorden från Venus, vilket kan omvandlas till grader ($\theta = 17.6 \text{ m}^\circ$) eller ungefär 1 bågminut och 4 bågsekunder. Svar med relativt vinkelfel på upp till $\pm 25\%$ accepteras.

Uppgift 2

En farkost faller genom Venus atmosfär. När den befinner sig 50 km ovanför ytan är atmosfärstrycket lika högt som vid havsnivå på jorden. Kort därefter slutar trycksensorn att fungera. Farkosten fortsätter dock att mäta temperaturen. Den genomsnittliga temperaturen mellan 0 och 50 km är 285°C (558.15 K) med försumbar variation inom höjdivervallet. Uppskatta trycket vid marknivå på Venus, givet antagandena att molekyler i Venus atmosfär har en snittvikt på 47.38 Da, samt att skillnaden i gravitationsacceleration mellan 0 och 50 km höjd är försumbar. Lösningen till differentialekvationen $\frac{d}{dx}f - Kf = 0$ är $f = Ae^{Kx}$.

Lösning på uppgift 2

Problemformuleringen i sig innehåller mycket förenklande info. Huvudidén för att lösa problemet är att vid hydrostatiskt ekvilibrium (dvs inget konstigt händer just nu) så kan vi behandla atmosfären i små "gaspaket".

Betänk ett rätblock av atmosfären, med bottenarea dA (parallell med ytan) och höjd dh (d för infinitesimaler), vinklad nedåt. Trycket på ovansidan är p_0 , och Pascals lag ger att trycket vid bottenytan är $p_b = p_0 + p_\Delta$ där $p_\Delta = g \cdot dh \cdot \rho$. Notera att gravitationsaccelerationen antas vara konstant (räknas ut enligt $g = G \frac{M_2}{r_2^2} \approx 8.87 \text{ m s}^{-2}$ med vanliga konventionen av R för omloppsradii och r för ekvatorialradii).

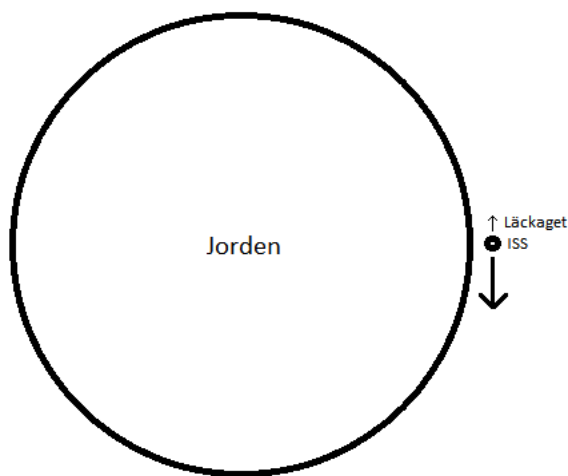
Vi får ut ρ vid det givna trycket p_0 (vi kan använda p_0 istället för p_Δ eftersom vårt gaspaket antas vara mycket litet, det går att rättfärdiga med ett $O((dh)^2)$ argument också), genom att vända lite på ideala gaslagen, alltså $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p_0 M}{k_B T}$.

Låt $f(x)$ vara atmosfäriska trycket x nedanför 50 km höjden i Venus atmosfär. Då har vi $f(0) = p_\oplus \approx 101.3 \text{ kPa}$, och från gaspaketsargumentet ovan har vi $\frac{df}{dx}(x) = \frac{gM}{k_B T}$ så f uppfyller diffekvationen som ges i tipset, med $K = \frac{gM}{k_B T}$. Nu kan vi helt enkelt sätta in konstanterna och beräkna trycket vid $x = 50 \text{ km}$,

$f(50 \text{ km}) = p_{\oplus} \cdot e^{\frac{gM}{k_B T} \cdot 50 \text{ km}} \approx 9530 \text{ kPa}$ ($T = 558.15 \text{ K}$, $M = 47.38 \text{ Da}$, $k_B = 1.381 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1}$). Svar med relativt tryckfel på 10% accepteras, det verkliga yttrycket är inte känt till mer än 1 värdesiffra.

Uppgift 3

Hur mycket högre blir ISS omloppsbana kring jorden till följd av utsprutande köldmedel från ett hål i en dockad Soyuz-kapsel? Anta att banan är cirkulär och att köldmedlet sprutar "bakåt" i rotationsriktningen. Se fig. 1 för en illustration. ISS befinner sig i en bana 420 km över jordytan och väger 420 000 kg. Köldmedlet sprutar ut med en hastighet på i snitt 1 m s^{-1} , och sprutar ut över flera dagar. Uppskatta mängden kylmedel som läcker ut till 100 kg.



Figur 1: ISS i omloppsbana kring jorden, med köldmedel som läcker bakåt i rotationsriktningen.

Lösning på uppgift 3

Det finns flera sätt att ta sig an detta problemet, med huvudsakliga ändamålet att få ut ett snyggt uttryck för själva skillnaden i omloppshöjd. Vi gör det mycket rimliga antagandet att höjdskillnaden är ganska liten ($< 10 \text{ km}$), och därför att tyngdaccelerationen vid ISS inte förändras av köldmedelsläckan. Låt r_0 , r_e , $M = 420\,000 \text{ kg}$, $m = 100 \text{ kg}$, v_0 , v_e vara omloppsradien före läckan, omloppsradien efter läckan, ISS massa, köldmedlets massa, ISS hastighet innan läckan, respektive ISS hastighet efter läckan.

Tyngdaccelerationen vid ISS är $a = (\frac{r_{\oplus}}{r_{\oplus} + 420 \text{ km}})^2 g \approx 8.63 \text{ m s}^{-2}$ ($g \approx 9.81 \text{ m s}^{-2}$ är tyngdaccelerationen vid jordens yta, $r_0 = r_{\oplus} + 420 \text{ km}$) eftersom gravitationskraften faller av med inversen kvadraten av avståndet. Centripetalaccelerationen måste vara lika med tyngdaccelerationen i vår cirkulära bana, så $a = \frac{v_0^2}{r_0}$ och $v_0 = \sqrt{ar_0}$. Den totala ökningen i rörelsemängd av ISS som köldmedlet inverkar är helt enkelt köldmedlets totala massa gånger dess utsprutningshastighet, så hastighetsökningen av ISS är $v_{\Delta} = \frac{m \cdot (1 \text{ m s}^{-1})}{M}$. Tyngdaccelerationen vid ISS är densamma efter läckan, så samma kraftbalans med centripetalaccelerationen ger $a = \frac{v_e^2}{r_e} = \frac{(v_0 + v_{\Delta})^2}{r_e}$. Vänd på steken (korsmultiplicera) och subtrahera originalomloppsradien för att få $r_{\Delta} = \frac{(v_0 + v_{\Delta})^2 - v_0^2}{a} = \frac{2v_0 v_{\Delta} + v_{\Delta}^2}{a} \approx 42 \text{ cm}$. Svar med relativt fel på upp till 20% accepteras.

Uppgift 4

En Lagrangepunkt är en plats där gravitationen från två himlakroppar gör så att ett mindre föremål (t.ex. en satellit) som befinner sig i punkten har samma omloppstid som den mindre himlakroppen.

Deluppgift 4a

Rita ett schematiskt diagram som visar hur Lagrangepunkterna på sol-jordlinjen är belägna med hänsyn till solen och jorden.

Deluppgift 4b

Beräkna avståndet från Solen till Lagrangepunkterna i ditt diagram.

Deluppgift 4c

Beskriv vad som händer med en satellit som befinner sig vid punkten P i fig. 2.

Lösning på uppgift 4

Lösning på uppgift 4a

Det viktiga är att visa att det finns 3 Lagrangepunkter på sol-jordlinjen:

(L3, avstånd lite över 1 AU) ————— (⊙) ————— (L1, < 1 AU) — (⊕) — (L2, > 1 AU)

Lösning på uppgift 4b

Återigen finns flera sätt att beräkna de tre avstånden, och vår lösning bestämmer avstånden genom att beräkna nettoaccelerationen för ett objekt vid respektive Lagrangepunkt (på obestämt avstånd från solen r), och likställa den med vad vinkelhastigheten på samma avstånd innebär (eftersom objekt vid en Lagrangepunkt i sol-jord systemet måste rotera med samma vinkelhastighet som jorden kring solen). När vi har en likhet med endast avståndet r som okänd använder vi grafitande räknare / numerisk lösning för att bestämma avståndet. Vi betecknar objektets massa med m , och jordens vinkelhastighet kring solen med ω (det vill säga $\omega = \frac{2\pi}{1\text{år}}$).

Lagrangepunkt L1

L1 ligger mellan jorden och solen, och roterar kring solen. Gravitationskrafterna från solen och jorden drar därmed åt olika håll, och centripetalaccelerationen är $m\omega^2 r$.

Vi får därmed

$$mG \left(\frac{M_{\odot}}{r^2} - \frac{M_{\oplus}}{(R_{\oplus} - r)^2} \right) = m\omega^2 r,$$

vilken vi dividerar med m . Nu letar vi efter en rot r till

$$G \left(\frac{M_{\odot}}{r^2} - \frac{M_{\oplus}}{(R_{\oplus} - r)^2} \right) - \omega^2 r = 0.$$

Med numerisk metod finner vi $r = 1 \text{ AU} - 1.58 \times 10^6 \text{ km}$.

Lagrangepunkt L2

L2 ligger utanför jorden som sett från solen, och roterar kring solen. Gravitationskrafterna från solen och jorden drar därmed åt samma håll.

Liknande från L1 får vi därmed

$$mG \left(\frac{M_{\odot}}{r^2} + \frac{M_{\oplus}}{(R_{\oplus} - r)^2} \right) = m\omega^2 r,$$

vilken vi dividerar med m . Nu letar vi efter en rot r till

$$G \left(\frac{M_{\odot}}{r^2} + \frac{M_{\oplus}}{(R_{\oplus} - r)^2} \right) - \omega^2 r = 0.$$

Med numerisk metod finner vi $r = 1 \text{ AU} + 1.5 \times 10^6 \text{ km}$.

Lagrangepunkt L3

L3 ligger motsatt jorden i omloppsbanans vinkel, och roterar kring solen. Gravitationskrafterna från solen och jorden drar därmed åt samma håll.

Liknande från L1 får vi därmed

$$mG \left(\frac{M_{\odot}}{r^2} + \frac{M_{\oplus}}{(R_{\oplus} + r)^2} \right) = m\omega^2 r,$$

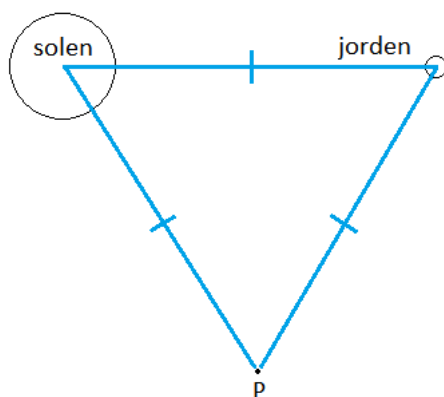
vilken vi dividerar med m . Nu letar vi efter en rot r till

$$G \left(\frac{M_{\odot}}{r^2} + \frac{M_{\oplus}}{(R_{\oplus} + r)^2} \right) - \omega^2 r = 0.$$

Med numerisk metod finner vi $r = 1 \text{ AU} - 6 \times 10^7 \text{ m}$ **vilket är fel**, men jag fattar inte varför denna approximation inte blir rätt, och med så stor marginal, så detta kvarstår att fixa (det bör ej vara att omloppsbanan sker kring CoM, som bara är 500km bort från solens kärna ju).

Lösning på uppgift 4c

Satelliten vid P roterar kring sol-jord systemets masscentrum C (med samma vinkelhastighet som jorden kring C), dvs satelliten ser ut att följa jordens bana, fast exakt 1 AU bakom (i linjära termer).



Figur 2: Solen, jorden, och punkten P i en liksidig triangel, som ligger i jordens omloppsplan.

Uppgift 5

Ljus har rörelsemängd, och när ljus absorberas eller reflekteras ändrar det därför rörelsemängden av det träffade objektet. Teoretiskt sätt borde detta stråltrycket kunna hålla uppe en farkost på en fast punkt över solens yta även utan någon omloppshastighet. Du ska kolla rimligheten av att göra ett solsegel som kan hållas uppe på detta sätt och vill därför veta hur lätt en sådan farkost behöver vara per kvadratmeter segel. Farkosten ska befinna sig på samma avstånd från solen som jorden gör. Utgå från att allt ljus vid alla våglängder reflekteras bort från seglet. Hur lätt (per kvadratmeter segel) behöver farkosten vara?

Lösning på uppgift 5

En icke uppenbar sak att notera är att eftersom fotonerna inte bara absorberas, utan reflekteras, så är kraften som solseglet upplever lika med dubbla rörelsemängden av det inkommande ljuset. Formellistan ger ljusets rörelsemängd i termer av ljusets energi, vilket förenklar saker, men det är också intressant att notera att ljusets rörelsemängd faktiskt är oberoende av våglängd/spektrum när energin är känd.

Vi använder kraftbalans för ett solsegel som är stationär vid 1 AU från solen. Då både intensiteten av strålningen från solen och gravitationskraften från solen skalar med $\frac{m}{r^2}$ för ett solsegel med konstant ytdensitet (massa per yta) kan vi bortse från specifik massa m och yta A . Låt ytdensiteten vara ρ . Vi får att

$$F = \rho A \frac{GM_{\odot}}{1 \text{ AU}^2} = Ap_{\odot},$$

där $p_{\odot}$ är stråltrycket från solen, alltså $p_{\odot} = 2 \cdot \frac{1360 \text{ W}}{c \cdot (1 \text{ m}^2)}$. Vi löser för $\rho = \frac{p_{\odot} \cdot (1 \text{ AU})}{GM_{\odot}} \approx 1.53 \text{ g m}^{-2}$. Svar med upp till 10% relativt fel accepteras.

Uppgift 6

Hur lång tid skulle det ta för Andromedagalaxen att kollidera med vår galax Vintergatan, om Andromeda vid startpunkten stod stilla gentemot Vintergatan? Vintergatans massa är ungefär $1,15 \cdot 10^{12}$ solmassor (med ganska stor osäkerhet) och Andromeda har en massa på $2,01 \cdot 10^{12}$ solmassor (med ännu större osäkerhet). Andromeda befinner sig 2,5 miljoner ljusår bort.

Lösning på uppgift 6

Keplers tredje lag är vår frälsning. Två gravitationellt interagerande objekt (där relativistiska effekter inte är relevant, vilket vi antar här) rör sig alltid en elliptisk bana kring varandra, och i detta fallet börjar objekten vid maximalt avstånd, och ellipsen är degenererad till en linje (alltså har den ingen lillaxel men har en storaxel). Låt $d = 2.5 \times 10^6 \text{ ly}$, $M_A = 2,01 \cdot 10^{12} M_{\odot}$, $M_V = 1,15 \cdot 10^{12} M_{\odot}$.

Keplers tredje lag är

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi r^2},$$

där $a = \frac{d}{2}$ är halva storaxeln, T är omloppstiden (och $\frac{T}{2}$ är tiden till kollision av symmetriskäl), och $m_1 = M_A$, $m_2 = M_V$ är galaxernas massor. Vi löser ut för T ,

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2(\frac{d}{2})^3}{G(M_A + M_V)}} \approx 3.95 \times 10^{17} \text{ s}.$$

Därmed blir tiden till kollision $\frac{T}{2} \approx 1.975 \times 10^{17} \text{ s} \approx 6.3 \times 10^9 \text{ år}$. Svar med upp till 25% relativt fel accepteras.



Figur 3: En illustration av hur kollisionen kommer se ut från jorden.

Givna solsystemsdata, värden, och formler

Himlakropp	Diameter (km)	Avstånd från solen (miljoner km)	Massa (10^{21}kg)
Solen	$6.955 \cdot 10^5$	—	$1,989 \cdot 10^9$
Merkurius	4879,4	57,9	330,1
Venus	12104	108,2	4868
Jorden	12756	149,6	5972
Mars	6779	227,9	641,7
Jupiter	142800	778,3	$1,898 \cdot 10^6$
Saturnus	120660	1427,0	$5,681 \cdot 10^5$
Uranus	51118	2871,0	$8,681 \cdot 10^4$
Neptunus	49528	4497,1	$1,024 \cdot 10^5$

Tabell 1: Grundläggande data om solsystemet.

Namn	Värde	Enhet
Newtons gravitationskonstant	$6,674 \cdot 10^{-11}$	$\text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$
Solarkonstanten	1360	W m^{-2}
Plancks konstant	$6,626 \cdot 10^{-34}$	J s
Ljusets hastighet i vakuum	299,8	km s^{-1}
Ljusår	$9,461 \cdot 10^{12}$	km
Dalton (Da, u, amu)	$1,661 \cdot 10^{-27}$	kg
Boltzmanns konstant	$1,381 \cdot 10^{-23}$	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{K}^{-1}$
Atmosfäriskt tryck vid havsnivå (på jorden)	101,3	kPa

Tabell 2: Fysikaliska värden

Namn	Formel
Newtons gravitationslag	$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$
Centripetalacceleration	$a = \frac{v^2}{r}$
Fotonens rörelsemängd	$p = \frac{E}{c}$
Fotonens energi	$E = hf$
Keplers tredje lag	$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$
Pascals lag	$p_{tot} = p_0 + \rho \cdot g \cdot h$
Ideala gaslagen	$pV = \frac{m}{M} k_B T$

Tabell 3: Fysikaliska formler