

Kvalificeringsprov Astronomiolympiaden 2024 (med lösningsförslag)

Astronomisk Ungdoms Astronomiolympiadgrupp

31 Januari 2024
kl 09:00 till 12:00

Detta är kvalificeringsprovet för den svenska Astronomiolympiaden 2024. De 15 personer med högst poäng (**varje uppgift ger maximalt 5 poäng**) kommer erbjudas en plats på vårt träningsläger i Stockholm i april. Från träningslägret går fem personer sedan vidare till *International Olympiad on Astronomy & Astrophysics (IOAA)* i Brasilien, i augusti.

Lycka till!

Namn	
Mejl	
Telefonnummer	
Personnummer (XXXXXX-XXXX) <i>Behövs bara om du vill bli medlem i Astronomisk ungdom</i>	
Skola	
Årskurs	

Provet börjar på nästa sida.

Tillåtna verktyg:

Skrivdon, kladdpapper, grafitande (ej symbolhanterande) miniräknare, **ingen egen formelsamling** (förutom sista sidan av provbladet). **Svara på varje fråga på separata papper, och se till att numrera alla sidor du lämnar in.**

Jag har svarat på följande frågor (kryssa i):

1	2	3	4	5	6

Gillar du rymden? Vi också! Du kan bli medlem gratis genom att kryssa i rutan nedan.

Jag vill bli medlem i Astronomisk Ungdom:

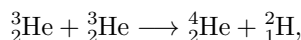
☐

Notation

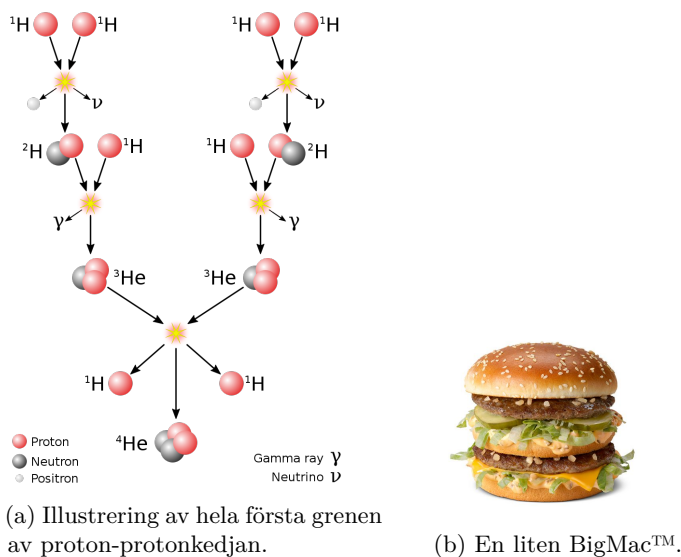
Standardsymbolerna för himlakropparna (i ordning från solen) är $\odot$, $\mercury$, $\venus$, $\oplus$, $\mars$, $\jupiter$, $\saturnus$, $\uranus$, $\neptune$, och $\pluto$ för Pluto.

Uppgift 1

I solen omvandlas massa till energi genom flera olika fusionsprocesser. Den dominerande processen (vilken bidrar till 83,6% av solens luminositet) är den så kallade proton-proton-kedjans första gren, illustrerad i fig. 1a. Processens kemiska formel är



där reaktionsprodukterna frisläpper 26,732 MeV energi, varav 2,2% går förlorat genom neutrinoemission. Hur många sådana reaktioner sker per sekund i solen, och vad är den totala massan av partiklarna som ingår i reaktionen varje sekund (alltså reaktanterna)? Givet att en McDonalds™ BigMac™ ger dig 550 kcal, hur många BigMac™ värt av energi producerar en genomsnittlig liter av solens materia per sekund?



Figur 1: Astronomisk Ungdom är inte sponsrat av eller på annat sätt kopplat till McDonalds™ Sverige.

Lösning på uppgift 1

Den totala effekten av alla reaktioner av typ som visas ovan är $\frac{0,836 \cdot 3,827 \times 10^{26} \text{ W}}{1-0,022} = 3,27 \times 10^{26} \text{ W}$. Om man delar detta med energin i en reaktion får man antalet per sekund:

$$\frac{3,27 \times 10^{26} \text{ W}}{26,732 \times 10^6 \text{ eV}} = 7,64 \times 10^{37} \quad (1)$$

Massan av dessa får man genom att multiplicera med massan av 2 helium-3 kärnor. Detta blir $3,82 \times 10^{11} \text{ kg}$.

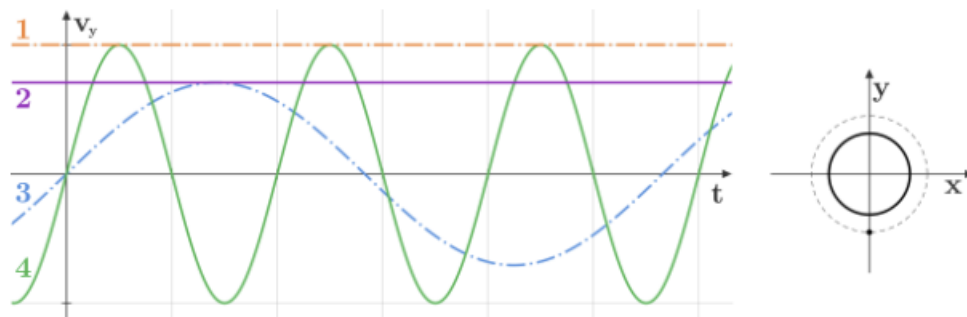
Volymen av solen är

$$V = \frac{4\pi \left(\frac{6,955 \times 10^8 \text{ m}}{2} \right)^3}{3} \quad (2)$$

Effekten per liter blir då $P/V = 2,173 \times 10^{-3} \text{ W/l}$. Om vi delar med energin i en BigMac™ får vi vårt svar: $9,44 \times 10^{-10} \text{ st}$.

Uppgift 2

Två satelliter, A och B, rör sig i cirkulära omloppsbanor runt jorden. Satellit A befinner sig på höjden $h = 6371$ km ovanför jordens yta, och satellit B någonstans längre bort från jordens yta. Satellit A har dubbelt så stor massa som satellit B. Du kan anta att omloppsbanorna är ekvatoriella.



Figur 2: Vänster: svarsalternativ för hastighetskomponenter i y-led för satelliterna. Höger: koordinatsystemet som används med jorden samt en godtycklig satellit utritade.

Deluppgift 2a

I figur 2 till höger är en punkt utritad på den streckade linjen. Låtsas att pricken motsvarar en satellit (ej nödvändigtvis A eller B) och den streckade linjen är dess omloppsbanan runt jorden. Rita ut alla krafter som satelliten upplever i den punkten, samt dess hastighet. Storleken på pilarna får vara godtycklig men ska vara klart synlig och ha korrekt riktning.

Deluppgift 2b

Vilken av kurvorna i grafen motsvarar hastighetskomponenten i y-led för satellit A respektive B? Se i Figure 2 hur koordinatsystemet definieras.

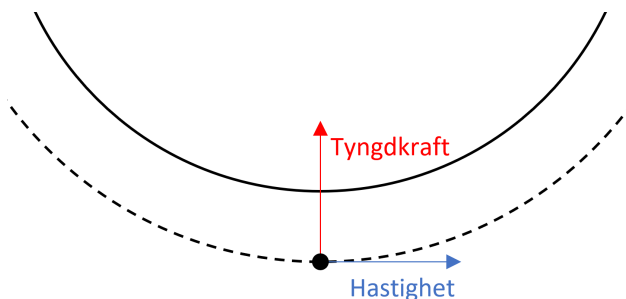
Deluppgift 2c

Uppskatta på vilken höjd satellit B befinner sig. Visa hur du kom fram till ditt svar.

Lösning på uppgift 2

Uppgift 2a

Den enda kraft som påverkar satelliten är jordens tyngdkraft och är riktad mot jordens mitt. Denna kraft är i detta fall lika stor som centripetalkraften. Hastigheten följer omloppsbanan av satelliten.



Figur 3: Lösning till Uppgift 2a

Uppgift 2b

Hastigheten totalt kommer vara konstant i storlek för satelliterna men kommer variera i riktning. Därför kommer hastigheten i y-led variera som en sinusvåg. Satelliter som är närmre den centrala kroppen (jorden) har en högre hastighet. Detta kan vi få från:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (3)$$

Därav är 3 kurvan för satellit B och 4 kurvan för satellit A.

Uppgift 2c

Från ekvation 3 kan vi ta fram hastigheten för de två omloppsbanorna:

$$v_A = \sqrt{\frac{GM}{r_A}}, v_B = \sqrt{\frac{GM}{r_B}} \quad (4)$$

Om vi delar v_A på v_B och sedan kvadrerar uttrycket får vi:

$$\frac{v_A^2}{v_B^2} = \frac{r_B}{r_A} \quad (5)$$

Från figuren kan vi se att v_A är ca $1,5v_B$ alltså kan vi lösa ut att:

$$r_B = 1,5^2 r_A \quad (6)$$

Eftersom r_A är 12 742 km kan vi lösa att r_B är 29 000 km. Höjden blir då 22 000 km.

Uppgift 3

För 74 dagar sedan (18 november) befann sig Mars på den bortre sidan av solen sett från jorden som alltså var skyddad av solen. Samtidigt var månen 5 dagar gammal. Vilken vinkel är det mellan Mars och månen sett från jorden idag (31 januari)? Månens omloppsradius är $3,844 \times 10^8$ m. Antag att båda omloppsbanorna är cirkulära. Med månens ålder menas här tiden sen det senast var nymåne.

Lösning på uppgift 3

Mars omloppstid (från kepler III):

$$T_{Mars} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM_{Solen}}} \quad (7)$$

Månens omloppstid:

$$T_{Manen} = 2\pi \sqrt{\frac{r_{Manen}^3}{GM_{Jorden}}} \quad (8)$$

Grader som månen rört sig:

$$\frac{74 + 5}{T_{Manen}} \cdot 360 = 315^\circ + 720^\circ \quad (9)$$

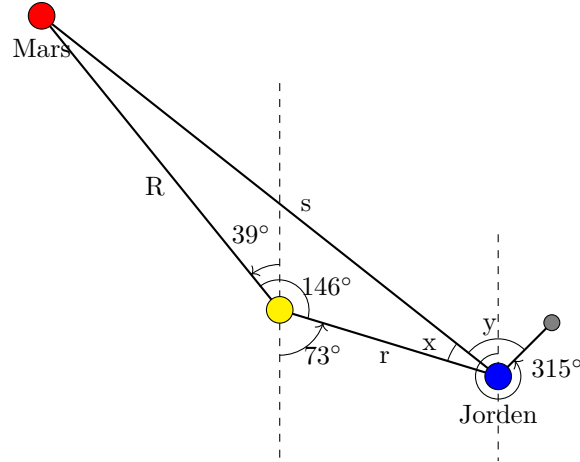
Grader Mars rört sig:

$$\frac{74}{T_{Mars}} \cdot 360 = 39^\circ \quad (10)$$

Grader Jorden rört sig:

$$\frac{74}{T_{Jorden}} \cdot 360 = 73^\circ \quad (11)$$

Med lite trigonometri får man följande figur:



Figur 4: Geometrisk situation

Där $x + y = 73^\circ + 45^\circ$ och Cosinus-satsen ger:

$$R^2 + r^2 - 2Rr \cos 146^\circ = s^2 \quad (12)$$

Sinussatsen ger då:

$$\frac{\sin x}{R} = \frac{\sin 146^\circ}{s} \iff \sin x = \frac{R \sin 146^\circ}{s} \implies x = 20,7^\circ \quad (13)$$

Detta ger dig $y = 96,6^\circ$, vilket är svaret.

Uppgift 4

En asteroid kommer mot vårt solsystem i en parabolisk bana som kommer närmast solen vid 1 AU. I en parabolisk bana är den totala mekaniska energin alltid 0 enligt följande:

$$-\frac{GM_{sol}m_{asteroid}}{R} + \frac{m_{asteroid}v^2}{2} = 0.$$

Asteroidens medeldensitet, ρ , är $2 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ och dess diameter, D , är 4,5 km (diametern av *3122 Florence*, en potentiellt farlig jordnära asteroid). Om asteroiden i sin närmsta punkt till solen träffar jorden, vad blir skillnaden i jordens omloppshastighet precis efter kollisionen?

Lösning på uppgift 4

Man får först ställa upp relationen mellan gravitationspotentialen och rörelseenergin och lösa ut v för asteroiden.

$$-\frac{GM_{sol}m_{asteroid}}{R} + \frac{m_{asteroid}v^2}{2} = 0 \iff v = \sqrt{\frac{2GM_{sol}}{R}} \quad (14)$$

Asteroidens massa kan tas fram m.h.a (15)

$$\rho \frac{4\pi(\frac{D}{2})^3}{3} = m_{asteroid} \quad (15)$$

Sedan är det rörelsemängdsekvationen där man löser ut hastighetsskillnaden med vissa förenklingar av typen $M_{Jord} \gg m_{asteroid}$. Här har vi antagit att asteroiden kommer träffa jorden så att den ökar jordens hastighet. Den kan också träffa så att hastigheten minskar, men skillnaden i hastighet blir densamma.

$$M_{Jord}v_{Jord} + m_{asteroid}v = (M_{Jord} + m_{asteroid})(v_{Jord} + \Delta v) \iff \Delta v = \frac{m_{asteroid}}{M_{Jord}}v_{asteroid} \quad (16)$$

Detta ger med tal $\Delta v = 673 \times 10^{-9} \text{ m s}^{-1}$

Uppgift 5

Planet X är en sfärisk gasplanet som består enbart av vätgas (H_2). Följande förhållande måste vara sant för att gasplanet ska kunna behålla sin atmosfär,

$$v_0 > \frac{1}{6}v_{flykt} \quad (17)$$

där v_0 är gasmolekylernas hastighet vid ytan och v_{flykt} är flykthastigheten. Verifiera att Planet X **inte** uppfyller denna relation (d.v.s att v_0 inte är större än $1/6v_{flykt}$). Massan M_X av planeten är $1,8 \times 10^{24}$ kg, medeldensiteten ρ är 1300 kg m^{-3} och trycket vid ytan p är 400 kPa.

Lösning på uppgift 5

Om medelhastigheten för en partikel är större än flykthastigheten kan inte objektet behålla några av gaspartiklarna, vilket beskrivs av:

$$v_0 > \frac{1}{6}v_{flykt} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{2GM_X}{R_X}}. \quad (18)$$

Givet formeln för genomsnittlig rörelseenergi hos partiklar med massa m vid en viss temperatur T enligt Boltzmanns formel kan man härleda v_0 vilket passar in i relationen enligt

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{3}{2}k_B T \iff v_0 = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \quad (19)$$

T går att ta fram genom att använda ideala gaslagen och samtidigt använda formeln för molmassa för att få relation (20).

$$T = \frac{pVm}{M_X k_B} = \frac{pm}{k_B \rho} \quad (20)$$

Insättning i ekvation (19) med värden ger snitthastigheten

$$v_0 = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = 30 \text{ m s}^{-1}. \quad (21)$$

Planetens radie kan härledas genom att använda planetens massa och densitet för att få volymen och sedan använda den sfäriska formen.

$$V\rho = M_X \implies \frac{R_X^3 4\pi}{3}\rho = M_X \implies R_X = \left(\frac{3M_X}{\rho 4\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 6900 \text{ km} \quad (22)$$

Insättning i formeln för flykthastighet ger

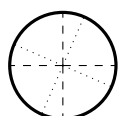
$$\frac{1}{6}v_{flykt} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{2GM_X}{R_X}} = 980 \text{ m s}^{-1}. \quad (23)$$

Alltså kan vi se i (21) och (23) att den ursprungliga påståendet stämmer.

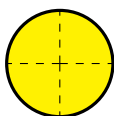
Uppgift 6

Uppskatta hur lång är den längsta respektive kortaste dagen sett från Göteborg. Med dag menas här kontinuerlig tidsperiod då solen befinner sig över horisonten. Göteborgs koordinater är $57,71^\circ$ nord och $11,97^\circ$ öst. Jorden kan antas sfärisk, och dess bana cirkulär. Försumma jordens rörelse kring solen under en enskild dag.

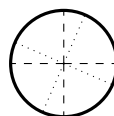
Lösning på uppgift 6



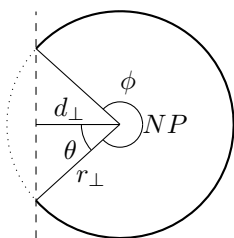
Sommar



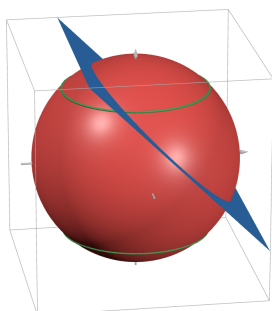
Solen



Vinter



Göteborgs bana sett från nordpolen under sommaren



Den första bilden visar hur jorden befinner sig under sommaren och vintern. För att lösa vårt problem behöver vi räkna ut hur lång tid det tar för Göteborg att snurra runt jordens axel för att solen ska förstå gå upp och sedan går nedanför horisonten. Från figurerna så är de prickade linjerna jordens ekvator och en rak linje från ekvatorn till nordpolen. Det vi är ute efter är när Göteborg befinner sig på den heldragna linjen på sidan av den streckade linjen på den andra figuren som motsvarar till när solen ligger precis vid horisonten. För att göra detta måste vi hitta $d_{\perp}$ och $r_{\perp}$ vilket är projektionen av avståndet mellan det vertikala (streckade) planet (se tredje figur, vertikala planet=streckade i första bilden, ringen=Göteborgs bana, nordpolen rakt upp) och nordpolen respektive projektionen av avståndet mellan nordpolen och Göteborg. Om vi låter

$$d = \text{jordens lutning} = 23,3^{\circ}$$

samt

$$r = 90^{\circ} - L_{gbg} = 90^{\circ} - 57,7^{\circ} = 32,3^{\circ}$$

så får vi att

$$d_{\perp} = R_{\oplus} \sin(23,3^{\circ})$$

och

$$r_{\perp} = R_{\oplus} \sin(32,3^{\circ}).$$

Vi finner därmed att

$$\cos \theta = \frac{d_{\perp}}{r_{\perp}} \Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{d_{\perp}}{r_{\perp}} \right).$$

Från den andra figuren gäller då att

$$2\theta + \phi = 360^{\circ} \Rightarrow \phi = 360^{\circ} - 2 \arccos \left(\frac{d_{\perp}}{r_{\perp}} \right).$$

För att hitta den totala tid T som Göteborg har vi då

$$\frac{T_{\text{sommar}}}{23\text{h}56\text{m}} = \frac{\phi}{360^{\circ}}$$

$$T_{sommar} = \frac{360^\circ - 2 \arccos\left(\frac{d_\perp}{r_\perp}\right)}{360^\circ} 23\text{h}56\text{m} = \left(1 - \frac{\arccos\left(\frac{d_\perp}{r_\perp}\right)}{180^\circ}\right) 23\text{h}56\text{m}$$

$$T_{sommar} = \left(1 - \frac{\arccos\left(\frac{\sin(23,5^\circ)}{\sin(32,3^\circ)}\right)}{180^\circ}\right) 23\text{h}56\text{m} = 18\text{h}23\text{m}.$$

Vill vi nu bestämma hur lång en dag är på vintern kan vi observera att detta är lika med den tid som Göteborg befinner sig på den prickade cirkelsektorn i den andra figuren vilket vi redan bestämt till 2θ . Alltså fås

$$\frac{T_{vinter}}{23\text{h}56\text{m}} = \frac{2\theta}{360^\circ}$$

$$T_{vinter} = \frac{\arccos\left(\frac{\sin 23,5^\circ}{\sin 32,3^\circ}\right)}{180^\circ} 23\text{h}56\text{m} = 5\text{h}33\text{m}.$$

Detta kan också ses genom att $5\text{h}33\text{m} = 23\text{h}56\text{m} - 18\text{h}23\text{m}$.

Givna solsystemsdata, värden, och formler

Himlakropp	Diameter vid ekvator (km)	Avstånd från solen (10^6 km)	Massa (kg)	Luminositet (W)
Solen	$6,955 \times 10^5$	—	$1,989 \times 10^{30}$	$3,827 \times 10^{26}$
Merkurius	4879,4	57,9	$3,301 \times 10^{23}$	—
Venus	12104	108,2	$4,868 \times 10^{24}$	—
Jorden	12756	149,597870	$5,972 \times 10^{24}$	—
Mars	6779	227,9	$6,417 \times 10^{23}$	—
Jupiter	142800	778,3	$1,898 \times 10^{27}$	—
Saturnus	120660	1427,0	$5,681 \times 10^{26}$	—
Uranus	51118	2871,0	$8,681 \times 10^{25}$	—
Neptunus	49528	4497,1	$1,024 \times 10^{26}$	—

Tabell 1: Grundläggande data om solsystemet.

Namn	Värde	Enhet
Newtons gravitationskonstant	$6,67408 \times 10^{-11}$	$\text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$
Hubbles konstant	68	$\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$
Solarkonstanten	1360	W m^{-2}
Plancks konstant	$6,626 \times 10^{-34}$	J s
Ljusets hastighet i vakuum	299,792458	Mm s^{-1}
Ljusår	$9,461 \times 10^{12}$	km
Parsec (pc)	3,262	ljusår
Dalton (Da, u, amu)	$1,660539 \times 10^{-27}$	kg
Dalton (Da, u, amu)	931,4941	$\text{MeV } c^{-2}$
Boltzmanns konstant	$1,381 \times 10^{-23}$	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{K}^{-1}$
Stefan-Boltzmanns konstant	$5,6704 \times 10^{-8}$	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$
Atmosfäriskt tryck vid havsnivå (på jorden)	101,3	kPa
Jordens rörelsemängdsmoment	$8,038 \times 10^{37}$	kg m^2
Jordens lutning	23,44	grader ($^\circ$)
Siderisk dag	23,9344696	h
Julianskt år	365,25	dagar (24h)
Nuklidmassa ^3_2He	3,01602932	u
Nuklidmassa ^1_1H	1,008	u
Molmassa H_2	2,016	g mol^{-1}
Mänskliga ögats vinkelupplösning	30	as
Elektronvolt (eV)	$1,6022 \times 10^{-19}$	J
Kilokalorier (kcal)	4184	J

Tabell 2: Fysikaliska värden

Namn	Formel
Newtons gravitationslag	$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$
Centripetalacceleration	$a = \frac{v^2}{r}$
Fotonens rörelsemängd	$p = \frac{E}{c}$
Fotonens energi	$E = hf$
Stefan-Boltzmanns lag	$\frac{P}{A} = \sigma T^4$
Wiens lag	$\lambda_{max} T = 2,898 \text{mm K}$
Keplers tredje lag	$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1+m_2)}{4\pi^2}$
Flykthastighet	$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$
Pascals lag	$p_{tot} = p_0 + \rho gh$
Ideala gaslagen	$pV = \frac{m}{M} k_B T$
Medelrörelseenergi	$E = \frac{3}{2} kT$
Molmassa	$n = \frac{m}{M}$
Sinussatsen	$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$
Cosinussatsen	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

Tabell 3: Fysikaliska formler