

# Kvalificeringsprov Astronomiolympiaden 2025 (med lösningsförslag)

Astronomisk Ungdoms Olympiadgrupp

4 Februari 2025  
kl 09:00 till 12:00

Detta är kvalificeringsprovet för den svenska Astronomiolympiaden 2025. De 15 personer med högst poäng (**varje uppgift ger maximalt 5 poäng**) kommer erbjudas en plats på vårt träningsläger i Stockholm i april. Från träningslägret går fem personer sedan vidare till *the International Olympiad on Astronomy & Astrophysics (IOAA)* i Indien i augusti.

Lycka till!

|                                                                                             |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Namn                                                                                        |  |
| Mejl                                                                                        |  |
| Telefonnummer                                                                               |  |
| Personnummer (XXXXXX-XXXX)<br><i>Behövs bara om du vill bli medlem i Astronomisk ungdom</i> |  |
| Skola                                                                                       |  |
| Årskurs                                                                                     |  |

Provet börjar på nästa sida.

Tillåtna verktyg:

Skrivdon, kladdpapper, grafitande (ej symbolhanterande) miniräknare, **ingen egen formelsamling** (förutom sista sidan av provbladet). **Svara på varje fråga på separata papper, och se till att numrera alla sidor du lämnar in.**

**Jag har svarat på följande frågor (kryssa i):**

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|   |   |   |   |   |   |

Gillar du rymden? Vi också! Du kan bli medlem gratis genom att kryssa i rutan nedan.

**Jag vill bli medlem i Astronomisk Ungdom:**

☐

## Notation

Standardsymbolerna för himlakropparna (i ordning från solen) är  $\odot$ ,  $\mercury$ ,  $\venus$ ,  $\earth$ ,  $\mars$ ,  $\jupiter$ ,  $\saturn$ ,  $\uranus$ , och  $\pluto$  för Pluto.

## Uppgift 1

Genom kemisk analys har astronomer fastställt att Jupiter har en medeldensitet på  $1326 \text{ kg/m}^3$ , och baserat på dess gravitationseffekter vet man att dess massa är  $1,898 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ . Baserat på denna information, beräkna Jupiters radie. Vid ett senare tillfälle observerar en astronom Jupiter och mäter dess vinkelradie (radien av Jupiter på himlen) till  $0,000162$  radianer. Bestäm Jupiters avstånd från jorden vid tidpunkten för denna observation.

### Lösning av 1

För att finna radien bör man använda relationen mellan massa, densitet och volym i kombination för formeln för volymen av en sfär.

$$\begin{aligned}\frac{M}{\rho} &= V \\ &= \frac{4\pi r^3}{3} && \Longleftrightarrow \\ r &= \left( \frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left( \frac{3 \cdot 1.898 \cdot 10^{27}}{4\pi \cdot 1326} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 69912477.34 \text{ m}\end{aligned}$$

Man bör sedan använda sig av det trigonometriska förhållandet mellan radien för planeten och avståndet och vinkeln som denna triangel bildar. Eftersom vi har en liten vinkel i radianer kan vi även använda att  $\tan \theta \approx \theta$

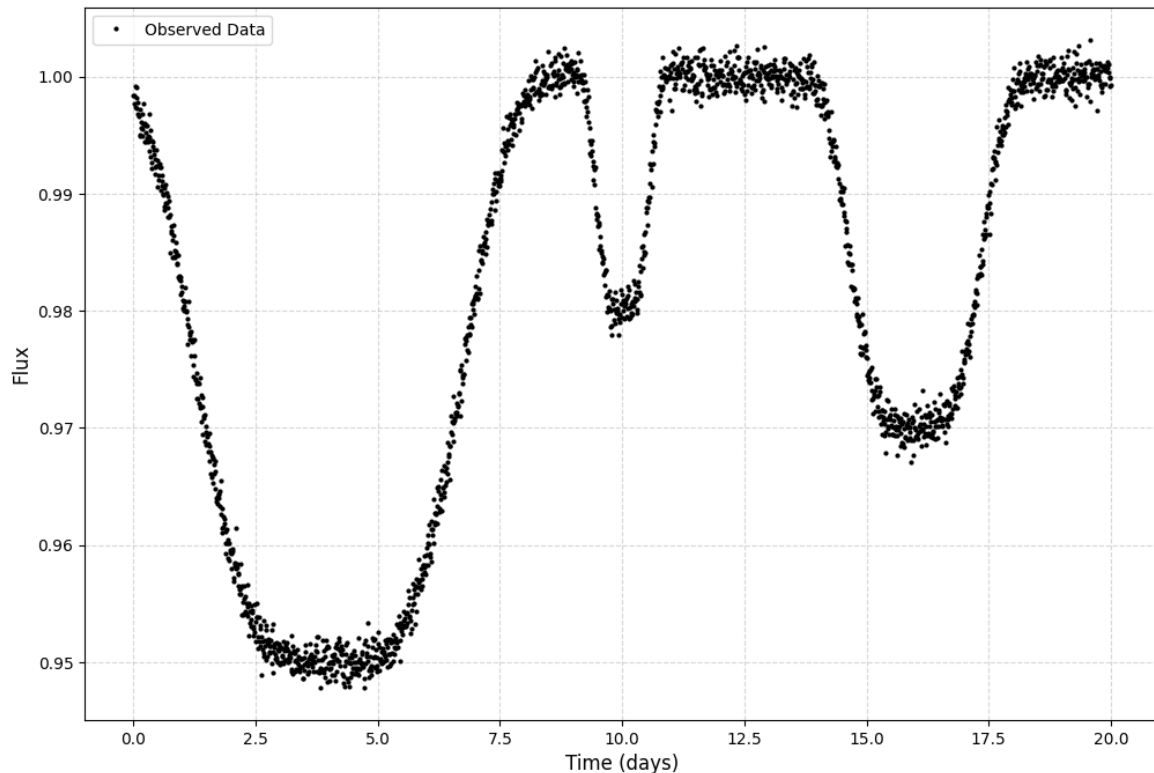
$$\begin{aligned}\theta &= \frac{r}{d} && \Longleftrightarrow \\ d &= \frac{r}{\theta} \\ &= \frac{69912477.34}{0.000162} \\ &= 4.31558502 \cdot 10^{11} \text{ m}\end{aligned}$$

## Uppgift 2

Diagrammet till höger visar ljuskurvan för en stjärna, med tre distinkta minima som inträffar vid olika tidpunkter. Dessa minima varierar i djup och bredd. Objektet korsar stjärnan mitt på och man kan anta att deras banor är cirkulära.

1. **Objektstorlek:** Genom att studera kurvorna, ordna de tre objekten efter storlek.
2. **Omloppsradie:** Genom att studera kurvorna, ordna de tre objekten efter hur nära de är sin stjärna i sin omloppsbana.

Förklara ditt resonemang för båda delarna med hjälp av diagrammet.



Figur 1: Ljuskurva för en stjärna över tid.

## Lösning av 2

1. Den vänstra dippen motsvarar påverkan av det största objektet, eftersom den är djupast och därmed visar att detta objekt tar bort mer av ljuset från stjärnan än de två andra gör. Dippen i mitten motsvarar påverkan av det minsta objektet eftersom den är grundast, och därmed visar att detta objekt tar bort mindre av ljuset från stjärnan än de två andra objekten. Svar: Vänstra dippen motsvarar påverkan av det största objektet, högra dippen av det näst största och mittendippen av det minsta objektet.

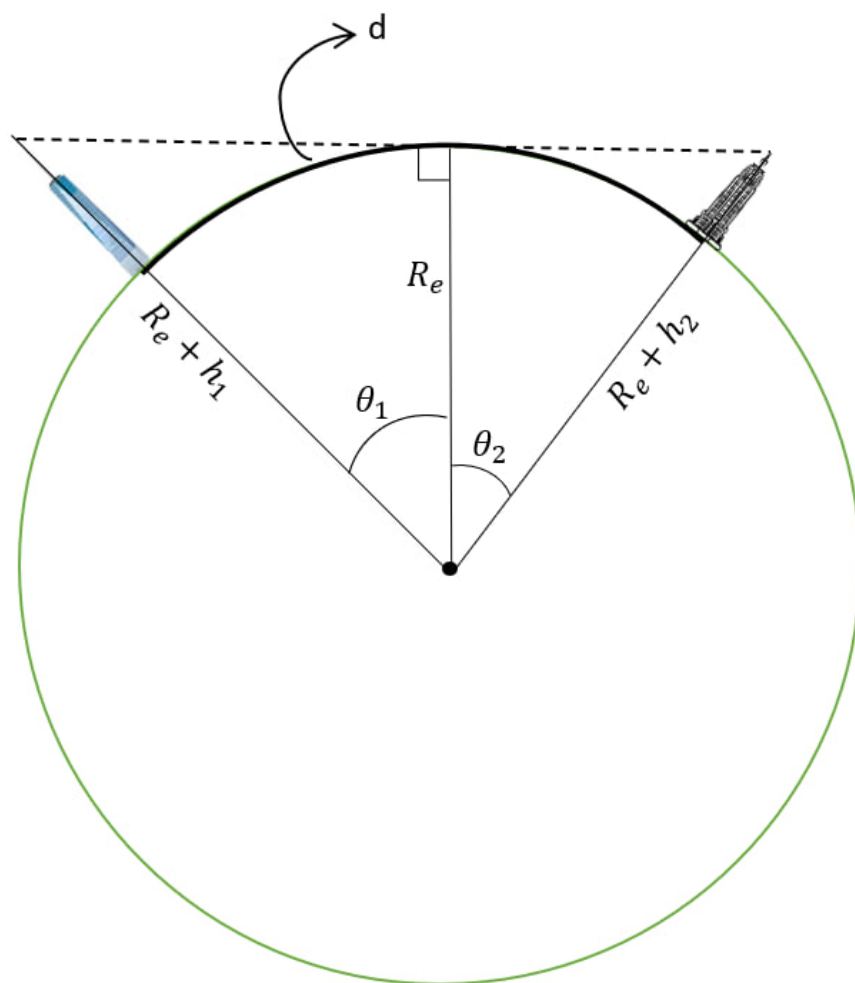
2. Dippen i mitten motsvarar påverkan av det snabbaste objektet, eftersom den är smalast och därmed visar att detta objekt skymmer stjärnan under kortare tid än de två andra gör, det vill säga att det rör sig snabbast framför stjärnan. Dippen till vänster motsvarar påverkan av det långsammaste objektet eftersom den är bredast och därmed visar att detta objekt skymmer stjärnan under längre tid än de två andra gör, det vill säga att det rör sig långsammast framför stjärnan. Objekt i omlopp kring stjärnor rör sig med lägre hastighet ju större avstånd de har från stjärnan. Svar: Vänstra dippen motsvarar påverkan av det avlägsnaste objektet från stjärnan, dippen till höger påverkan av det näst avlägsnaste och dippen i mitten påverkan av det objekt som rör sig närmast stjärnan.

### Uppgift 3

En vacker dag bestämmer sig Arya och Philip för att utföra ett experiment. Philip klättrar upp till toppen av Empire State Building, som har en höjd på 443 meter, medan Arya tog hissen till toppen av One World Trade Center, med en höjd på 541 meter. De vill se hur långt ifrån varandra de båda byggnaderna behöver vara för att de inte längre ska kunna se varandra. Finn detta avstånd. Jorden antas vara en sfär.

#### Lösning av 3

Låt  $R_e$  beteckna jordens radie, och låt  $h_1$  och  $h_2$  representera höjderna på One World Trade Center respektive Empire State Building. Det minsta avståndet mellan de två byggnaderna där Arya och Philip inte längre kan se varandra bestäms av den tangentlinje till jorden som förbinder topparna på dessa byggnader, vilket representerar deras siktlinje.



**Figur 2:** Schematiskt diagram av situationen.

Från det schematiska diagrammet kan vi skriva följande för vinkeln  $\theta_1$  vid One World Trade Center:

$$\cos(\theta_1) = \frac{R_e}{R_e + h_1}$$

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{R_e}{R_e + h_1}\right) = \arccos\left(\frac{6.378 \times 10^6}{6.378 \times 10^6 + 541}\right) = 0.746^\circ$$

På samma sätt, för vinkeln  $\theta_2$  vid Empire State Building:

$$\cos(\theta_2) = \frac{R_e}{R_e + h_2}$$

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{R_e}{R_e + h_2}\right) = \arccos\left(\frac{6.378 \times 10^6}{6.378 \times 10^6 + 443}\right) = 0.675^\circ$$

Den totala vinkelavståndet mellan de två byggnaderna,  $\theta$ , är summan av dessa två vinklar:

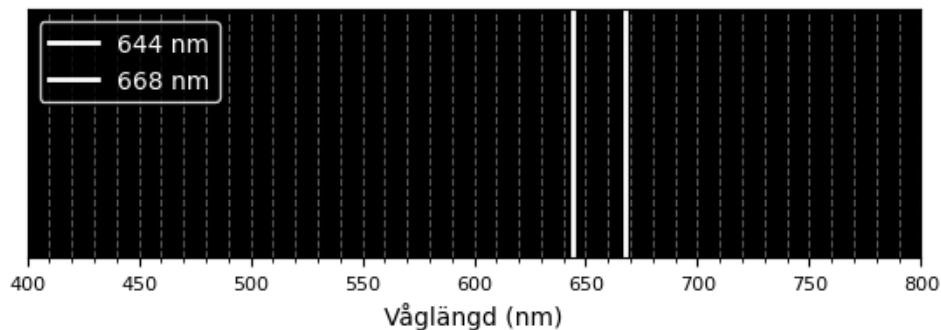
$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = 1.42^\circ = 0.0248 \text{ rad}$$

Slutligen, det minsta avståndet  $d$  mellan de två byggnaderna, baserat på jordens radie  $R_e$ , är:

$$d = \theta_{\text{rad}} \cdot R_e = 158 \text{ km}$$

## Uppgift 4

Dopplerförskjutningen för en stjärna som kretsar kring ett svart hål kan användas för att bestämma några av dess egenskaper. Nedan finns ett diagram av två förskjutna  $H\alpha$ -linjer, en rödförskjutna och en blåförskjutna, motsvarande linjen för olika färdriktning för en viss stjärna i sin bana.  $H\alpha$ -linjen är en av våglängderna som väte avger när dess elektron faller i energinivå och kan användas för att avgöra olika egenskaper hos himlakroppar. Stjärnan kretsar kring ett svart hål med en massa på  $M = 2 \cdot 10^{35} \text{ kg}$ . Bestäm stjärnans avstånd till det svarta hålet om man antar att den har en cirkulär omloppsbana.



Figur 3: Den rödförskjutna och blåförskjutna  $H\alpha$ -linjen

### Lösning av 4

Lösning av uppgiften följer ur att finna våglängdsskillnaden för mellan de olika våglängderna för att finna mittpunkten. Sedan ska man finna hur stor den verkliga våglängdsförskjutningen är och sedan relatera denna till hastighet.

$$\frac{668 + 644}{2} = 656 \text{ nm}$$

Vi får här även använda den approximerade formeln för Dopplerförskjutning eftersom  $v \ll c$ . Sedan väljer man antingen den blåförskjutna eller rödförskjutna linjen för att beräkna denna hastighet.

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} &= -\frac{v}{c} && \Longleftrightarrow \\ \frac{644 - 656}{656} &= -\frac{v}{3 \cdot 10^8} && \Longleftrightarrow \\ 0.182 \cdot 3 \cdot 10^8 &= 5487804.878 \text{ m/s} \\ &= 5.49 \text{ Mm/s} \\ &= v\end{aligned}$$

Nu kan man använda denna hastighet och planetens massa för att finna radien för planetens bana.

$$\begin{aligned}\frac{v^2}{r} &= \frac{GM}{r^2} && \Longleftrightarrow \\ r &= \frac{GM}{v^2} && \Longleftrightarrow \\ r &= \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{35}}{5487804.878^2} \\ &= 4.43 \cdot 10^{11} \text{ m}\end{aligned}$$

## Uppgift 5

I en avlägsen framtid beger sig mänskligheten bortom solsystemet. De vill dock ta med mycket av jordens värdefulla resurser. För att göra detta vill man ta en del av jorden med sig genom en massiv kontrollerad explosion som delar jorden i två fragment med massorna  $m_1$  och  $m_2$ . Fragmentet med massan  $m_1$  faller in i solen, medan fragmentet med massan  $m_2$  undkommer solens gravitationsfält och påbörjar en resa mot stjärnorna.

- a) Anta att flykthastigheten för ett objekt på avstånd  $R$  från solen ges av:

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

där  $M$  är solens massa. Använd denna formel och tillämpa rörelsemängdens bevarande för att bestämma det nödvändiga massförhållandet  $m_1/m_2$  för systemet.

- b) För att ett objekt ska kunna lämna solens gravitationsfält måste den totala energin (kinetisk + potentiell) vara noll eller större. Utifrån detta energikrav, härled formeln för flykthastigheten som anges i del a.

### Lösning av 5a

När  $m_1$  faller in i solen stannar det efter explosionen, vilket innebär att dess rörelse upphör. Därmed blir ekvationen för bevarande av rörelsemängd:

$$(m_1 + m_2)v_e = m_2v'$$

där  $v_e$  är jordens omloppshastighet innan explosionen, och  $v'$  är hastigheten för fragmentet  $m_2$  efter explosionen. Jordens omloppshastighet runt solen ges av:

$$v_e = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Därför är hastigheten för fragmentet  $m_2$  efter explosionen:

$$v' = \frac{(m_1 + m_2)}{m_2} v_e = \frac{(m_1 + m_2)}{m_2} \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

vilket förenklas till:

$$v' = \left( \frac{m_1}{m_2} + 1 \right) \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Vi observerar att när förhållandet  $m_1/m_2$  ökar, ökar även  $v'$ . För att hitta det minsta massförhållandet sätter vi bortre hastigheten lika med  $v'$ :

$$\sqrt{\frac{2GM}{R}} = \left( \frac{m_1}{m_2} + 1 \right) \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

Detta förenklas till:

$$\sqrt{2} = \frac{m_1}{m_2} + 1$$

Således är det minsta massförhållandet:

$$\frac{m_1}{m_2} = \sqrt{2} - 1 \approx 0.414$$

### Lösning av 5b

För att fly från solens gravitationsfält måste den totala energin (kinetisk + potentiell) vara noll eller större. Den totala energin  $E$  för ett objekt med massa  $m$  på avståndet  $R$  från solen är summan av dess kinetiska energi  $K$  och potentiella energi  $U$ :

$$K = \frac{1}{2}mv^2, \quad U = -\frac{GMm}{R}$$

Således är den totala energin:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$$

För att fly,  $E \geq 0$ . Detta ger:

$$\frac{1}{2}mv^2 \geq \frac{GMm}{R}$$

$$v^2 \geq \frac{2GM}{R}$$

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Således härleds flyghastigheten.

## Uppgift 6

I planetsystemet TRAPPIST-1 har forskare hittat 7 planeter vars ytor alla tros vara steniga. För att det livet vi är vana vid ska kunna kalla en planet beboelig krävs att vatten ska vara flytande på dess yta. Vilka av TRAPPIST-1:s planeter är beboeliga enligt denna definition? Luminositeten (effekten) av stjärnan i systemets mitt är  $2,17 \cdot 10^{23} \text{ W}$ . Du kan anta att planeterna absorberar all strålning som når dem och därmed agerar som perfekta svartkroppar samt homogen temperatur på planeternas ytor.

**Tabell 1:** Omloppsavstånden för samtliga upptäckta planeter i TRAPPIST-1 systemet. 1 AU är avståndet mellan solen och jorden:  $149 \cdot 10^9$  m.

| Planet              | b     | c     | d     | e     | f     | g     | h     |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Omloppsavstånd (AU) | 0,011 | 0,016 | 0,022 | 0,029 | 0,038 | 0,047 | 0,062 |

### Lösning av 6

Antag att stjärnans luminositet är  $L$ , planetens omloppsradie är  $r$ , och planetens radie är  $R$ .

Den energi som stjärnan avger sprider sig över en sfär med radie  $r$ , så den effekt som når varje kvadratmeter på denna sfär är:

$$b = \frac{L}{4\pi r^2}$$

Planeten absorberar en del av denna energi, och endast den tvärsnittsarea som planetens yta utgör är effektiv. Därför är den energi som planeten absorberar per sekund:

$$\text{Energi absorberad per sekund} = b \cdot \pi R^2 = \frac{L}{4\pi r^2} \cdot \pi R^2$$

För att planeten ska vara i termisk jämvikt måste den avge lika mycket energi per sekund som den absorberar. Energin som planeten strålar ut är:

$$\frac{L}{4\pi r^2} \cdot \pi R^2 = \sigma T^4 \cdot 4\pi R^2$$

där  $\sigma = 5.670374419 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-4}$  är StefanBoltzmanns konstant. Genom att förenkla ekvationen får vi:

$$\frac{L}{4\pi r^2} = \sigma T^4 \cdot 4$$

$$r^2 = \frac{L}{16\pi\sigma T^4}$$

$$r = \sqrt{\frac{L}{16\pi\sigma T^4}}$$

För att vatten ska vara i flytande form härleder vi gränser för omloppsradien. Först använder vi temperaturen 0°C (273.15 K) för att hitta den övre gränsen för avståndet från stjärnan:

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{2.17 \times 10^{23}}{16\pi \cdot 5.670374419 \times 10^{-8} \cdot 273.15^4}} = 3.70 \times 10^9 \text{ m} = 0.025 \text{ AU}$$

Därefter använder vi kokpunkten för vatten, 373.15 K, för att bestämma den nedre gränsen:

$$r_{\min} = \sqrt{\frac{2.17 \times 10^{23}}{16\pi \cdot 5.670374419 \times 10^{-8} \cdot 373.15^4}} = 1.98 \times 10^9 \text{ m} = 0.013 \text{ AU}$$

Därmed ligger planeterna  $c$  och  $d$  inom den beboeliga zonen.

## Givna solsystemsdata, värden, och formler

**Tabell 2:** Fysikaliska värden

| Namn                                        | Värde                     | Enhet                                       |
|---------------------------------------------|---------------------------|---------------------------------------------|
| Newtons gravitationskonstant ( $G$ )        | $6,67408 \times 10^{-11}$ | $\text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$               |
| Hubbles konstant ( $H_0$ )                  | 68                        | $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$          |
| Solarkonstanten ( $G_{SC}$ )                | 1360                      | $\text{W m}^{-2}$                           |
| Plancks konstant ( $h$ )                    | $6,626 \times 10^{-34}$   | J s                                         |
| Ljusets hastighet i vakuum ( $c$ )          | 299,792458                | $\text{Mm s}^{-1}$                          |
| Ljusår (ly)                                 | $9,461 \times 10^{12}$    | km                                          |
| Parsec (pc)                                 | 3,262                     | ljusår                                      |
| Boltzmanns konstant ( $k_B$ )               | $1,381 \times 10^{-23}$   | $\text{m}^2 \text{kg s}^{-2} \text{K}^{-1}$ |
| Stefan-Boltzmanns konstant ( $\sigma$ )     | $5,6704 \times 10^{-8}$   | $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$             |
| Atmosfäriskt tryck vid havsnivå (på jorden) | 101,3                     | kPa                                         |
| Jordens radie ( $R_{\oplus}$ )              | 6378                      | km                                          |
| Jordens omloppsradi (AU)                    | $149,597870 \times 10^9$  | m                                           |

**Tabell 3:** Fysikaliska formler

| Namn                    | Formel                                                            |
|-------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| Newtons gravitationslag | $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$                                       |
| Centripetalacceleration | $a = \frac{v^2}{r}$                                               |
| Rörelsemängd            | $p = mv$                                                          |
| Fotonens rörelsemängd   | $p = \frac{E}{c}$                                                 |
| Fotonens energi         | $E = hf$                                                          |
| Stefan-Boltzmanns lag   | $\frac{P}{A} = \sigma T^4$                                        |
| Wiens lag               | $\lambda_{max} T = 2,898 \text{mm K}$                             |
| Keplers tredje lag      | $\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$                   |
| Flykthastighet          | $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$                                        |
| Ideala gaslagen         | $pV = \frac{m}{M} k_B T$                                          |
| Doppler-förskjutning    | $\frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{v}{c}$ |
| Klotets volym           | $\frac{4\pi r^3}{3}$                                              |